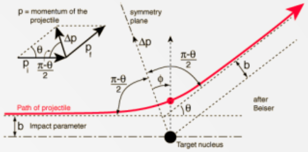
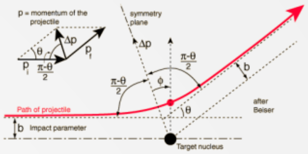


Oddziaływanie Promieniowania Jonizującego z Materią

Tomasz Szumlak, A.Obłąkowska-Mucha

WFiIS AGH
Kraków

„Stopping power" (poprzedni wykład)



W zastosowaniach HEP powszechnie używa się zmodyfikowanej formuły Bethe'go, zwaną równaniem Bethe'go-Bloch'a:

$$\left\langle -\frac{dE}{dx} \right\rangle = \kappa z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{1}{2} ln \left(\frac{2 m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 T_{MAX}}{I^2} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$$

[1] PDG

$$\kappa = 4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 = 0.3071\ MeV\ cm^2/g$$

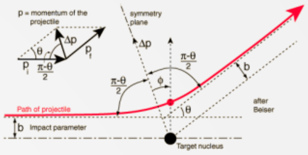
Nowości to:

- Czynnik Lorentza γ
- Poprawka „gęstościowa" na straty jonizacyjne, istotna dla cząstek ultra-relatywistycznych
- T_{MAX} - maksymalna energia kinetyczna przekazana elektronowi
- Jednostki w jakich mierzymy straty energii - $\left[\frac{MeV \cdot cm^2}{g}\right]$

Powyższy zapis używany jest, aby podkreślić, że straty energii cząstek naładowanych (o tym samym ładunku) są jedynie funkcją β (dla cząstek o najwyższych energiach formuła powyższa zaczyna również zależeć od masy cząstki jonizującej – dE/dx umożliwia identyfikację* cząstek!)

*Vertex 2023

„Stopping power" (VI)

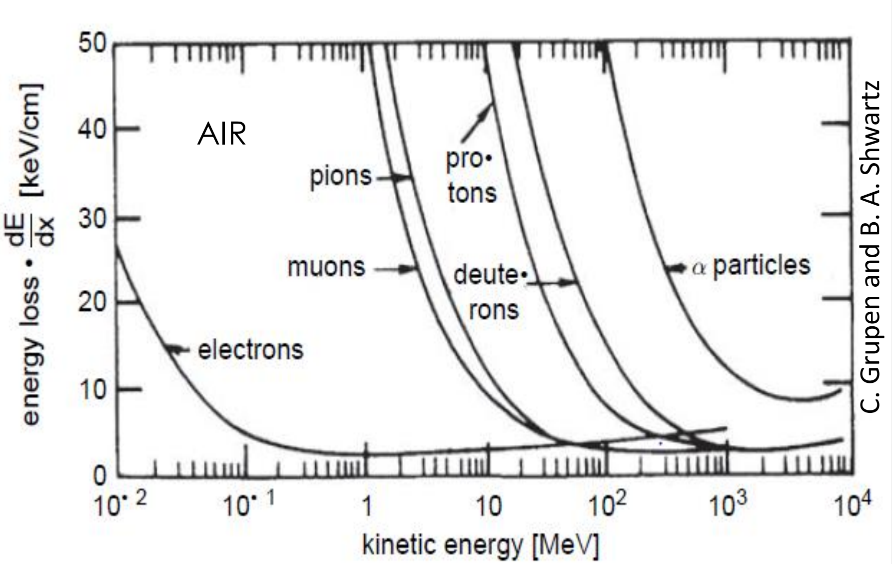


$$-\frac{dE}{dx} = \kappa z^2 \frac{Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left[ln\left(\frac{\overset{E_{k\,max}}{2m_e c^2\beta^2\gamma^2}}{I}\right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2}\right]$$

[2] C. Grupen, B. Shwartz

Absorber	$\frac{dE}{dx}\big|_{min} \left[\frac{MeV}{g/cm^2}\right]$	$\frac{dE}{dx}\big|_{min} \left[\frac{MeV}{cm}\right]$
Hydrogen (H_2)	4.10	$0.37 \cdot 10^{-3}$
Helium	1.94	$0.35 \cdot 10^{-3}$
Lithium	1.64	0.87
Beryllium	1.59	2.94
Carbon (Graphite)	1.75	3.96
Nitrogen	1.82	$2.28 \cdot 10^{-3}$
Oxygen	1.80	$2.57 \cdot 10^{-3}$
Air	1.82	$2.35 \cdot 10^{-3}$
Carbon dioxide	1.82	$3.60 \cdot 10^{-3}$
Neon	1.73	$1.56 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	1.62	4.37
Silicon	1.66	3.87
Argon	1.52	$2.71 \cdot 10^{-3}$
Titanium	1.48	6.72
Iron	1.45	11.41
Copper	1.40	12.54
Germanium	1.37	7.29
Tin	1.26	9.21
Xenon	1.25	$7.32 \cdot 10^{-3}$
Tungsten	1.15	22.20
Platinum	1.13	24.24
Lead	1.13	12.83
Uranium	1.09	20.66
Water	1.99	1.99
Lucite	1.95	2.30
Shielding concrete	1.70	4.25
Quartz (SiO_2)	1.70	3.74

$$\kappa = 4\pi N_A r_e^2 m_e^2 c^2 = 0.3071 \frac{MeV}{g/cm^2}$$



C. Grupen and B. A. Shwartz

https://pdg.lbl.gov/2000/atomicrpp.pdf

Straty energii (jednostki)

$$\boxed{-\frac{dE}{dx} = 2\kappa\left[ln\left(\frac{E_{k\,max}}{I}\right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2}\right]}$$

$$\left[\frac{dE}{dx}\right] = \frac{MeV}{g/cm^2}$$

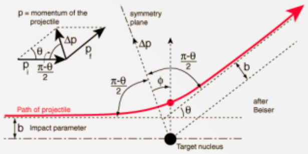
$$\kappa = 4\pi N_A r_e^2 m_e^2 c^2 = 0.3071\,\frac{MeV}{g/cm^2}$$

$[dx] = g/cm^2$, bo $\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{\rho ds}$, $[\rho] = g/cm^3$

gdzie $\boldsymbol{ds}$ to długość, a

$\boldsymbol{dx}$ to efektywnie gęstość powierzchniowa

Parametr I



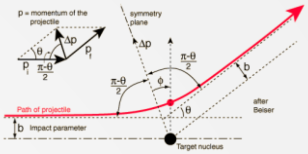
- Formuła BB jest bardzo kłopotliwa i podlegała wielu „korektom” na przestrzeni lat – formuła pół-empiryczna…
- Zacznijmy naszą dyskusję od **średniego potencjału wzbudzenia** I
- W przybliżeniu jest to iloczyn średniej orbitalnej częstości elektronów (w/g formuły Bohr’a) i stałej Planck’a
- W praktyce, konfiguracja powłok elektronowych jest tak skomplikowana, że nie da się wyznaczyć tego parametru nawet numerycznie
- W efekcie, parametr ten wyznaczono doświadczalnie na drodze pomiarów… $\frac{dE}{dx}$ dla różnych materiałów… $I \sim 10\ eV$

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z}\ eV, Z < 13$$

$$I = 16\, Z^{-0.6} eV\ , \mathrm{Z} > 1$$

$$\frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19} eV, Z \geq 13$$

Elektrony δ

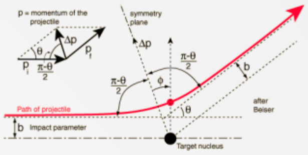


- Z uwagi na to, że główny mechanizm straty energii na drodze jonizacji polega na oddziaływaniu z elektronami atomowymi, powinniśmy się przyjrzeć dokładnie temu procesowi…
- „From the top" – cząstki naładowane, przechodzące przez materię (detektor) mogą **wzbudzać atomy** (emisja fotonów) albo przekazać wystarczającą **energię** elektronowi, aby **usunąć go z atomu** – jonizacja
- Istotnym problemem jest tutaj **maksymalna energia** jaką cząstki penetrujące mogą przekazać elektronom (**dlaczego?**)
- $E_k^{(Max)}$ będzie zależeć od masy spoczynkowej cząstki oraz od jej pędu:

$$p = mv = \gamma m_0 \beta c, \gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$$

$$\boxed{E_k^{(Max)} = \frac{2 m_e p^2}{m_0^2 + m_e^2 + \frac{2 m_e E}{c^2}}}$$

Elektrony δ



- Ta maksymalna strata energii kinetycznej cząstki jest oczywiście powiązana z jej energią całkowitą:

$$E_k^{(Max)} = E - m_0c^2 = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} - m_0c^2$$

- Pouczająca jest analiza asymptotyczna tych równań
  - Jeżeli energia cząstki jest niezbyt duża ($\gamma = \frac{E}{m_0c^2} \sim 10$, $\frac{2\gamma m_e}{m_0} \ll 1$) oraz jej masa jest dużo większa od masy elektronu:

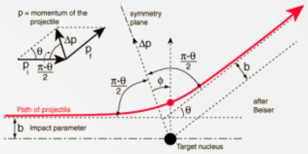
$$E_k^{(Max)} \approx 2m_ec^2\gamma^2\beta^2$$

    Np. mion, dla którego $\gamma = 10, E = 1.06\ GeV, m_\mu c^2 = 106\ MeV$

    może przekazać maksymalnie $E_k^{(Max)} \approx 100\ MeV$

  - Możemy również założyć, że cząstki posiadają bardzo dużą energię oraz masę dużo większą niż masa elektronu, wówczas…

Elektrony δ



$$E_k^{(Max)} = \frac{p^2}{\gamma m_0 + \frac{m_0^2}{2m_e}}$$

- Dla cząstek o dużych energiach mamy:

$$E_k \approx E, E \approx pc \; \rightarrow E_k^{(Max)} \approx \frac{E^2}{E + \frac{m_0^2 c^2}{2m_e}}$$

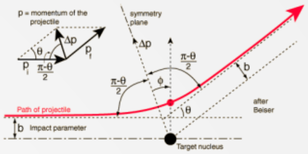
- W przypadku ultra-relatywistycznym:

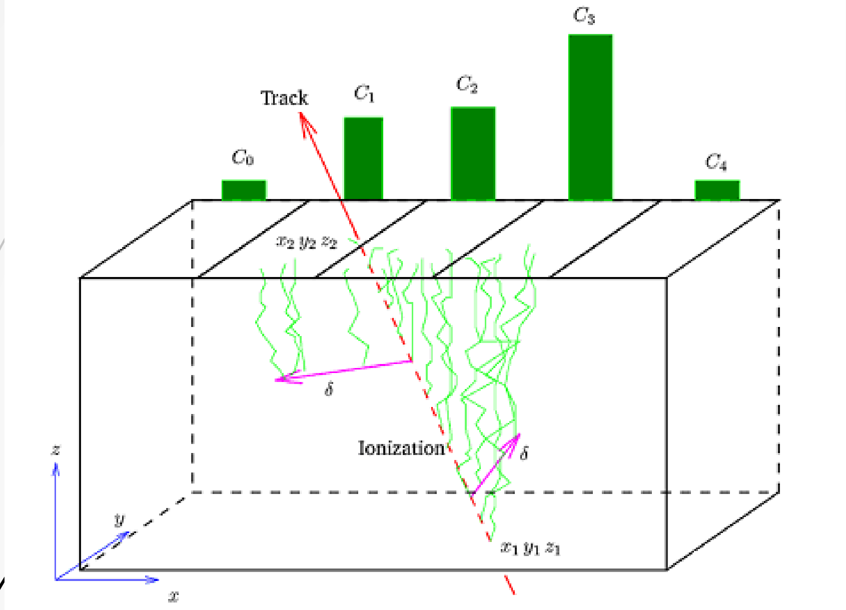
$$E \gg \frac{m_0^2 c^2}{2m_e} \rightarrow E_k^{(Max)} \approx E$$

- W przypadku, gdy cząstkami penetrującymi są elektrony

$$E_k^{(Max)} = E - m_e^2 c^2$$

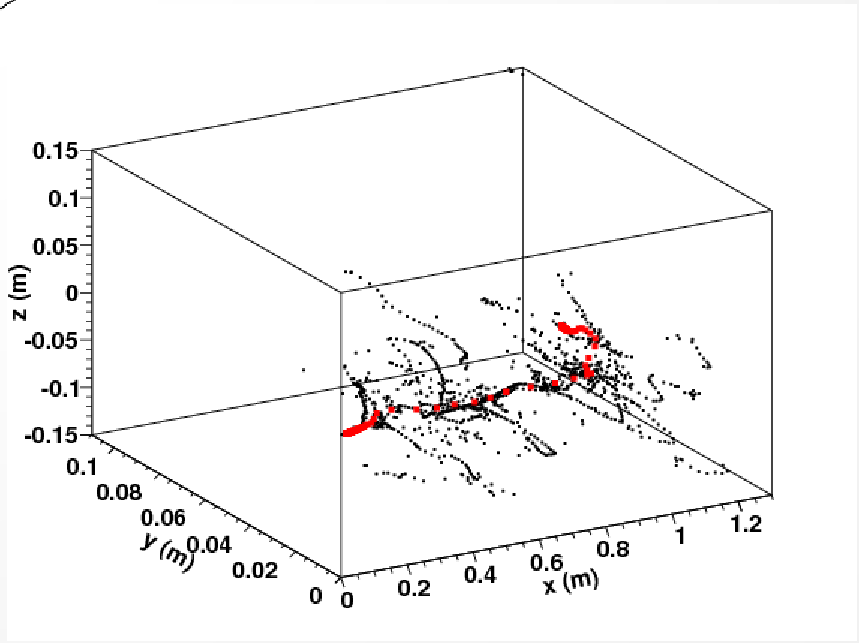
Elektrony δ



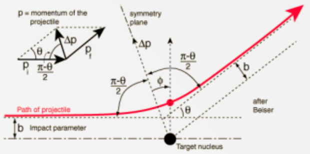


- Elektrony δ mogą mieć bardzo istotne znaczenie dla detektorów pozycjoczułych
- Wysokoenergetyczne „wybite" elektrony mogą prowadzić do wtórnej jonizacji
- Zmieniają też istotnie rozkład wygenerowanego ładunku
- Elektrony δ mogą „uciec" z absorbera

- Prowadzi to do dużej komplikacji w procesie modelowania odpowiedzi detektorów
- Może wpłynąć istotnie na pozycję cząstki jaką otrzymujemy podczas rekonstrukcji

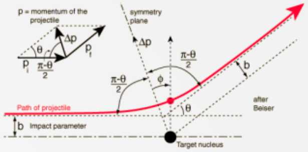


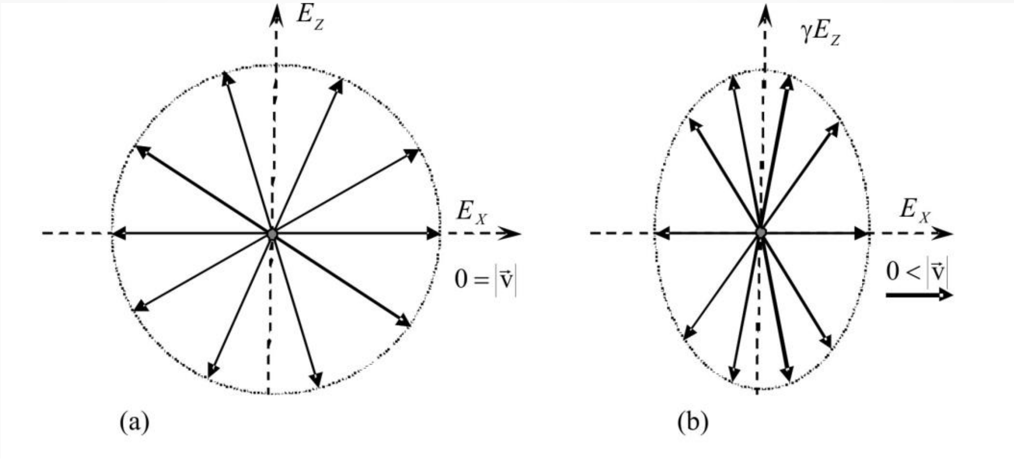
Poprawka δ

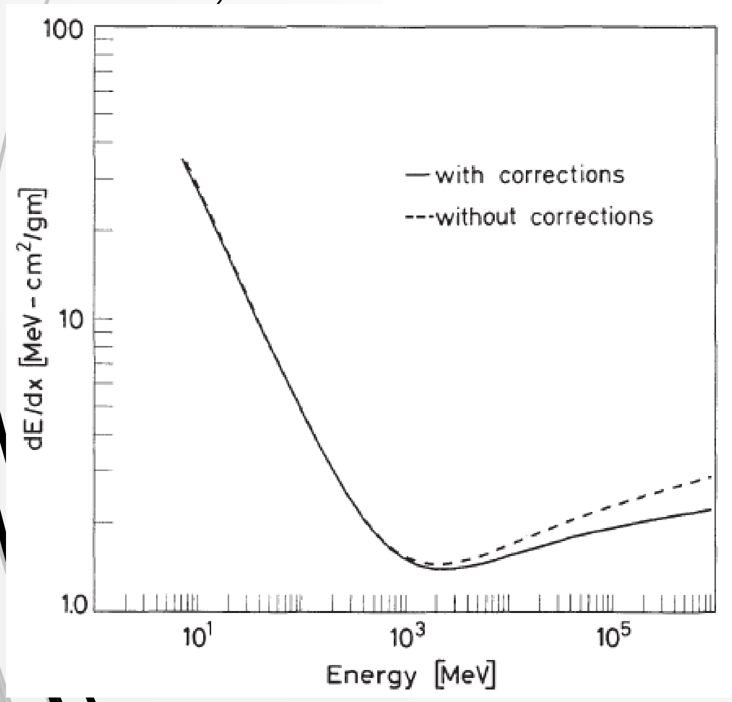


- Na początku „Health Hazard Warning" – poprawka δ nie ma nic wspólnego z elektronami δ…
- Poprawka ta nazywa się również poprawką gęstościową i ma duże znaczenie dla cząstek o b. dużych energiach
- Efekt ten możemy zrozumieć tak:
  - Cząstka naładowana powoduje poza jonizacją również **polaryzację** atomów materiału, przez który przechodzi
  - Im **większa gęstość** tym efekt jest **wyraźniejszy**
  - Ta polaryzacja powoduje „**ekranowanie**" elektronów, które znajdują się dalej od toru cząstki penetrującej
  - Powoduje to z kolei, że oddziaływanie z elektronami „dalszymi" jest **mniej prawdopodobne**
  - W efekcie zaobserwujemy **mniejszą jonizację** (stratę energii) niż moglibyśmy się spodziewać (BB zawyża faktyczne straty)

Poprawka δ c.d.

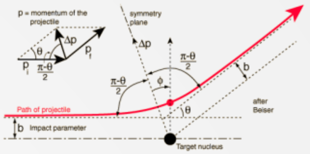






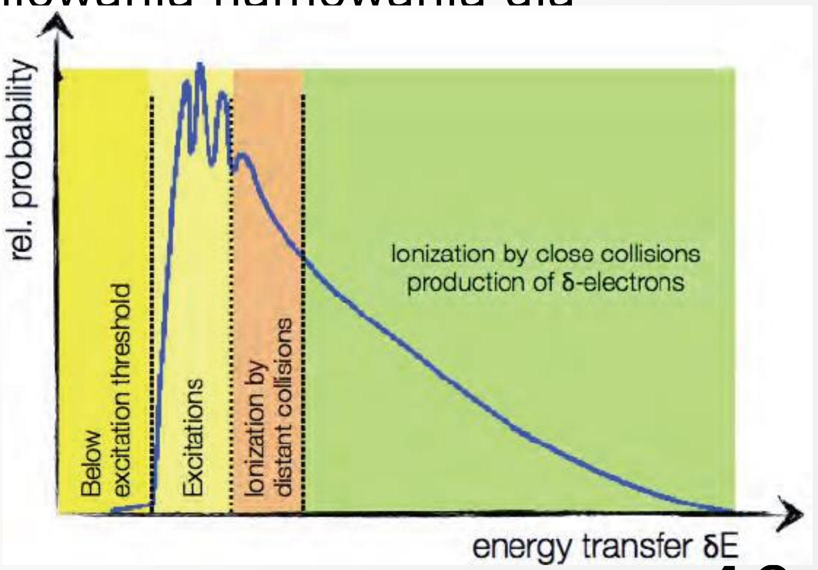
- Gdy cząstka naładowana porusza się z dużymi prędkościami jej pole elektrostatyczne ulega odkształceniu
- Jest to efekt relatywistyczny
- Gdyby nie było ekranowania, prawdopodobieństwo oddziaływań z „dalekimi” elektronami ulegało by zwiększeniu
- Pomiary eksperymentalne pokazują **efekt przeciwny**

Inne poprawki

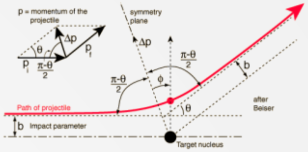


- Poprawka na energię wiązania – poprawka powłokowa – ma znaczenie dla cząstek „b. wolnych", dla których prędkość orbitalna elektronów nie jest zaniedbywalna
- Poprawka związana ze strukturą cząstek penetrujących
- Poprawka na przekrój czynny oddziaływań elm. (procesy wyższego rzędu)
- Efekty związane z emisją promieniowania hamowania dla cząstek ultra-relatywistycznych
- Spin cząstek penetrujących

  - Wydaje się, że nie ma dla nas ratunku… **Nie jest tak źle**, w zasadzie uwzględnienie poprawki gęstościowej oraz powłokowej załatwiają sprawę!

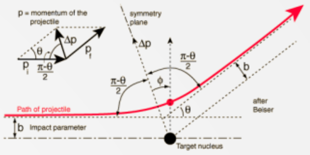


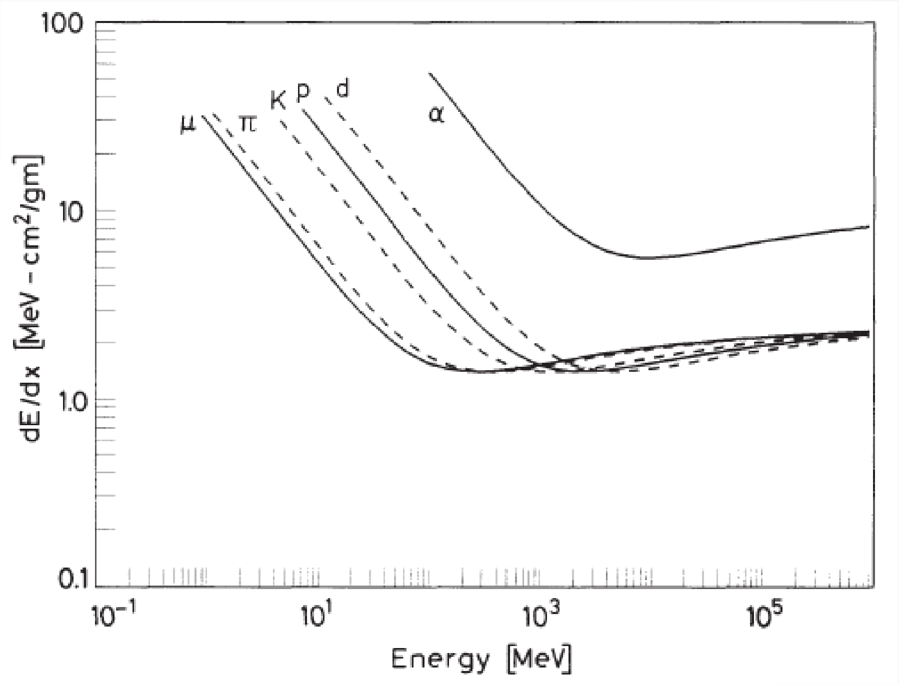
Zależność energetyczna



- Jaki obraz strat jonizacyjnych dostaniemy, gdy użyjemy formuły BB dla **różnych typów cząstek** w funkcji ich **energii**?
- Zaczynając od „niskich" energii straty jonizacyjne **maleją szybko** wraz ze wzrostem energii ($\sim\frac{1}{\beta^2}$)
- W pobliżu $\beta \approx 0.96$ szybkość strat jonizacyjnych **osiąga minimum** – minimalnie jonizujące cząstki (MIP)
- Straty energii na jonizację zaczynają następnie wzrastać dla cząstek relatywistycznych – wzrost ten ma charakter logarytmiczny ($\frac{1}{\beta^2} \approx \text{const}$)
- Wzrost relatywistyczny strat jonizacyjnych jest silnie tłumiony przez poprawkę gęstościową (plateau)
- Dla b. małych energii BB załamuje się, straty jonizacyjne osiągają maksimum a następnie gwałtownie maleją

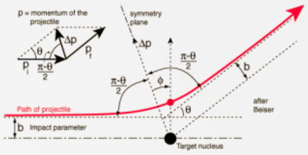
Zależność energetyczna



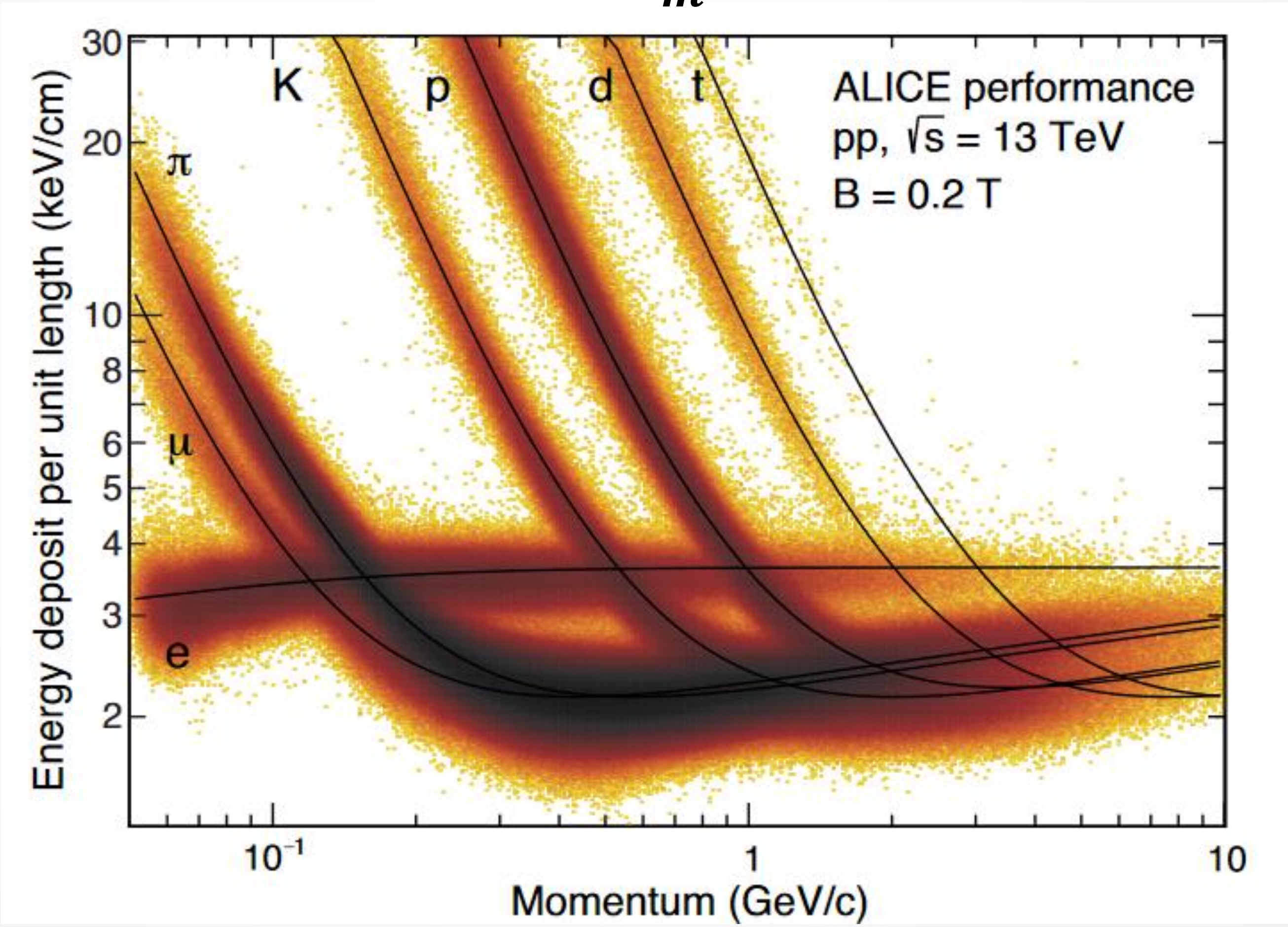


- Wartość minimalnej straty energii $\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{Min}$ jest praktycznie taka sama dla cząstek o tym samym ładunku
- Poniżej minimum krzywe strat energii są różne, co można wykorzystać do **identyfikacji cząstek** (w tym zakresie energii)

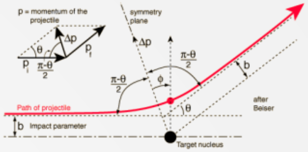
Zależność energetyczna



$$\beta\gamma = \frac{p}{m}$$

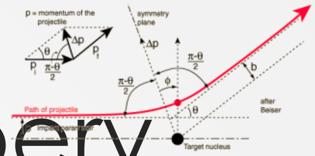


Fluktuacje strat energii



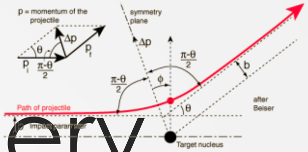
- Zależność BB opisuje **średnie** straty energii.
- Użyteczność formuły BB jest ograniczona w praktyce z uwagi na to, że nie możliwa jest (przynajmniej na razie) budowa detektora mierzącego $\frac{dE}{dx}$ a nawet $\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle$
- Możemy natomiast łatwo **mierzyć energię zdeponowaną** ΔE w absorberze o grubości Δx i mamy: $\Delta E = -\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle\Delta x$,
- Najczęstsze są niewielkie przekazy energii, To oznacza, że wartość **najbardziej prawdopodobna** ΔE^{MPV} jest przesunięta w stronę niższych przekazów
- Bardzo duże przekazy (związane z elektronami δ) się zdarzają. To oznacza, że **wartość średnia przekazów** przesuwa się w stronę wysokich wartości (analogia do zarobków)

Cienkie vs grube absorbery



- Jeżeli grubość materiału czynnego jest „odpowiednio duża” wtedy możemy zastosować do opisu rozkładu strat energii rozkład normalny (Centralne Twierdzenie Graniczne)
  - założmy, że naszą zmienną losową jest strata energii w pojedynczym zderzeniu z elektronem atomowym
  - jeżeli strata energii, δE, nie jest duża (ciężkie cząstki!) to możemy zaniedbać zmianę prędkości cząstki, a co za tym idzie sposobu oddziaływania z materią (energia się nie zmienia)
  - całkowita strata energii, może być więc wyznaczona jako suma strat elementarnych (posiadających taki sam P.D.F.) $\Delta E = \sum_{i/1}^{i/N} \delta E$

Cienkie vs grube absorbery



- Tak więc rozkład całkowitych strat energii w **grubych** absorberach jest rozkładem normalnym i można go zapisać jako:

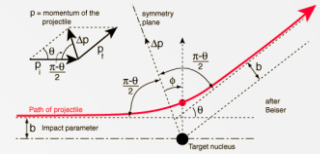
$$f(x, \Delta E) \propto exp\left(\frac{-(\Delta E - \langle \Delta E \rangle)^2}{2\sigma_0^2}\right)$$

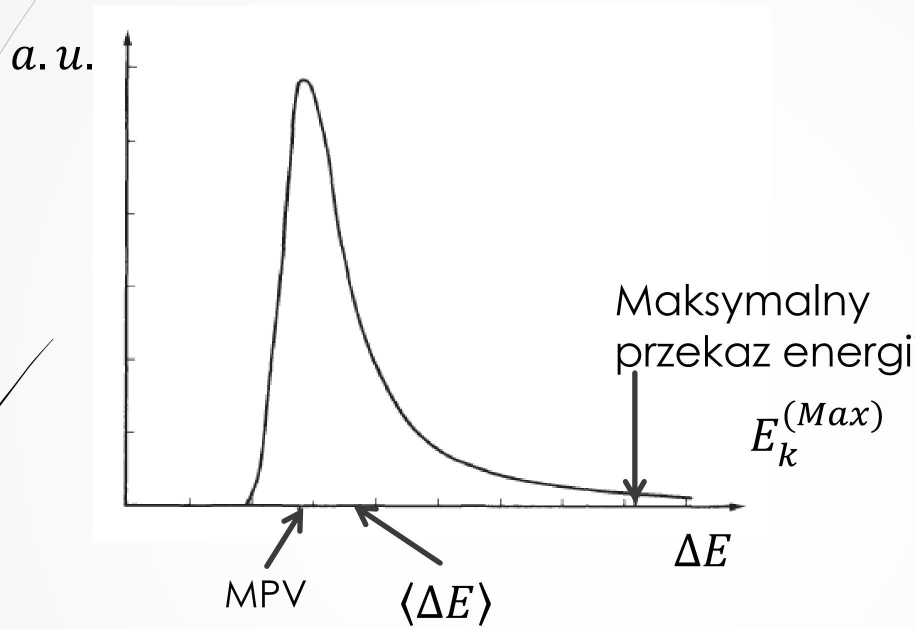
- Odchylenie standardowe dla tego rozkładu można wyznaczyć jako (przybliżenie Bohra):

$$\sigma_0^2 = \kappa \varrho x \ [MeV^2], \kappa = 0.1569 \frac{Z}{A}$$

- Sytuacja **komplikuje się znacznie** w przypadku, gdy liczba zderzeń jest mała – wówczas duże przekazy energii (rzadkie) zaczynają odkształcać rozkład całkowitej zdeponowanej energii (ogon w kierunku dużych strat energii)
- Średnia strata energii oraz najbardziej prawdopodobna strata energii nie są równe!
- Średnia strata energii $\langle \Delta E \rangle \ll E_{K\,\max}$

Cienkie absorbery

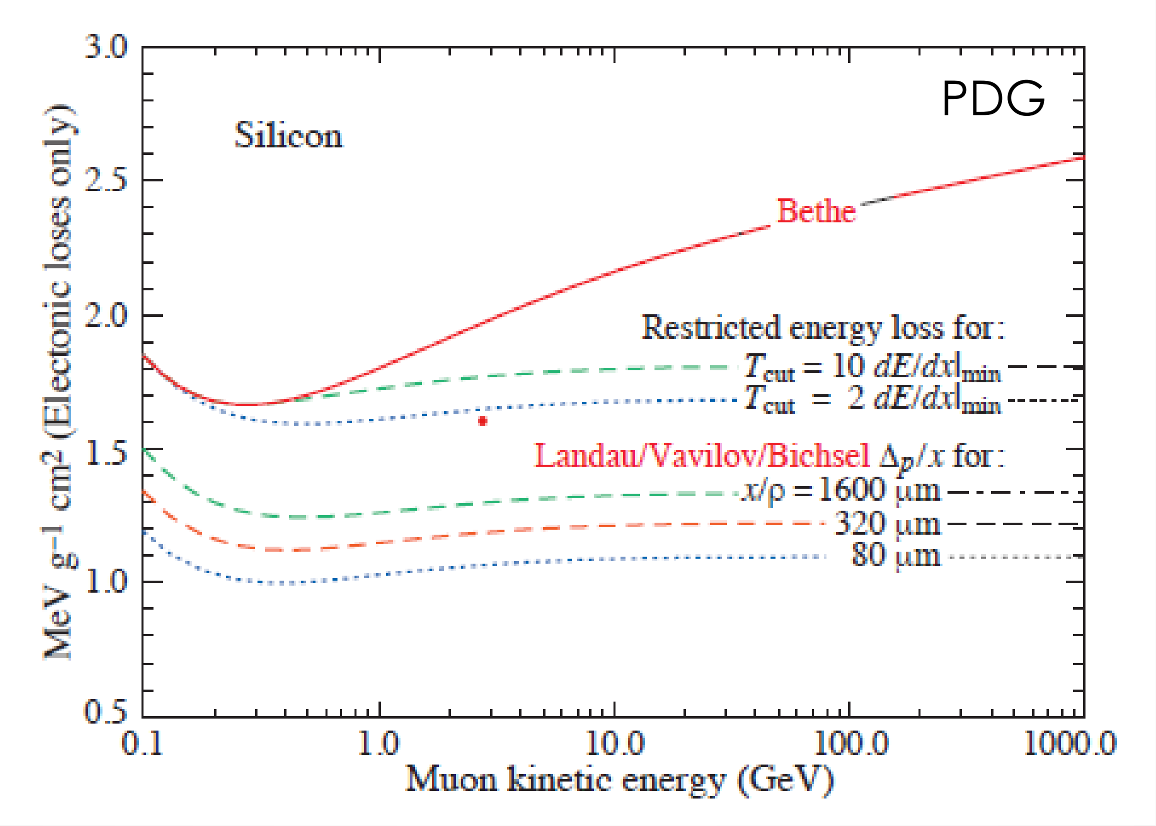




MPV (najbardziej prawdopodobny przekaz energii) dla MIP w 1 cm Ar:
ΔE^{MPV}=1.2 keV
$\langle \Delta E \rangle$ = 2.71 keV

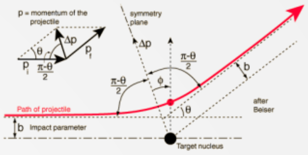
- Teoretyczny opis b. skomplikowany – teoria Landau'a-Wawiłowa
- Funkcja analityczna, która w przybliżeniu opisuje powyższy rozkład b. jest nietrywialna…
- uwaga: teraz najważniejszą zmienną jest: najbardziej prawdopodobny przekaz energii $\boldsymbol{\Delta E^{MPV}}$

Cienkie absorbery



- Rzadkie, ale bardzo duże przekazy energii (aż > ście GeV) powodują przesuniecie średnich strat $\langle dE/dx \rangle$ w stronę „ogonu" rozkładu (duże fluktuacje, elektronika)
- BB nie nadaje się do cienkich absorbentów

Rozkład Landau'a



- Okazuje się, że jednym z najważniejszych parametrów charakteryzujących fluktuacje energii w cienkich absorberach jest stosunek średniej straty energii do maksymalnej straty w jednym oddziaływaniu:

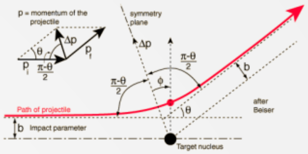
$$\zeta = \frac{\langle \Delta E \rangle}{E_k^{(Max)}}$$

- $E_k^{(Max)}$ znamy z poprzedniego wykładu, natomiast średni depozyt energii możemy wyznaczyć z równania BB (pomijamy wszystko poza kawałkiem z logarytmem):

$$\langle \Delta E \rangle = 2\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{A} \frac{1}{\beta^2} \rho x = \xi$$

- Używając parametru ζ możemy ilościowo zdefiniować cienki absorber jako taki, dla którego $\boldsymbol{\zeta < 10}$
- Aby wprowadzić analityczne równanie, które opisuje rozkład energii dla cienkich absorberów, zdefiniujemy współczynnik λ

Rozkład Landau'a



$$\lambda = \frac{\Delta E - \Delta E^{MPV}}{\xi}$$

- Gdzie: ΔE – energia zdeponowana w absorberze, ΔE^{MPV} - to najbardziej prawdopodobna wartość energii zdeponowanej
- Półempiryczna postać ΔE^{MPV} znana jest z literatury:

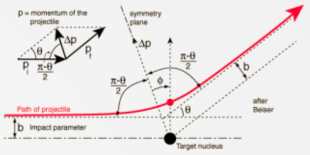
$$\Delta E^{MPV} = \xi \left[ln\left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}\right) + ln\left(\frac{\xi}{I}\right) - \beta^2 - \delta(\beta\gamma) + 0.2 \right]$$

- Funkcja opisująca zadowalająco rozkład energii zdeponowanej ma postać:

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\left(\lambda + e^{-\lambda}\right)\right)$$

- *Na ćwiczeniach laboratoryjnych będziemy zajmować się dokładnie pomiarem depozytów energii cząstek MIP w sensorach krzemowych (paskowe i pikselowe)

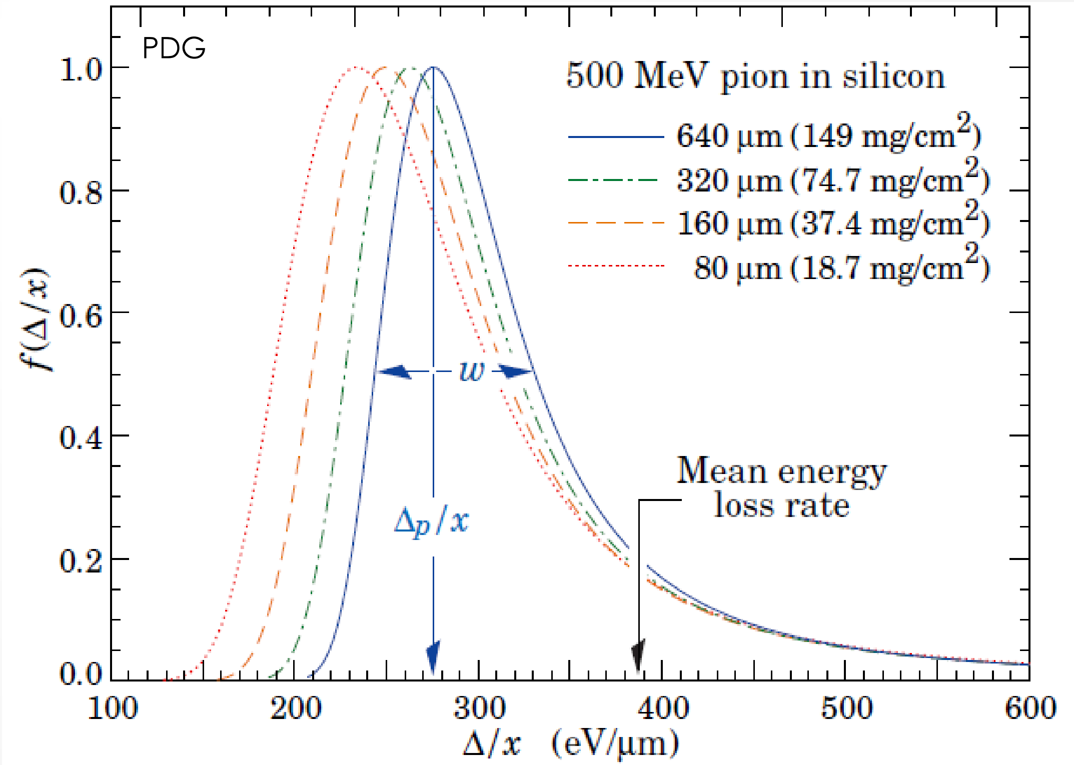
Rozkład Landau'a



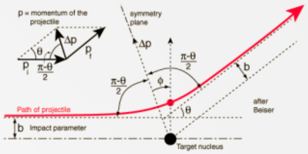
- Porównując równanie BB oraz to opisujące ΔE^{MPV}, można zauważyć, że $\left\langle\frac{dE}{dx}\right\rangle$ nie zależy od grubości materiału, natomiast ΔE^{MPV} skaluje się w przybliżeniu jak $a \cdot ln(x) + b$
- Rozkład strat dla cienkich detektorów o różnych grubościach:

Straty energii w stosunku do grubości x dla rosnących grubości Si:

- ΔE^{MPV} przesuwa się w stronę wyższych przekazów,
- asymetria maleje,
- szerokość rozkładu maleje



Cienkie detektory

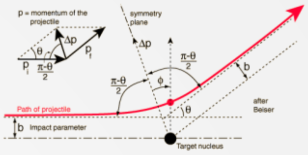


- Fluktuacje start energii spowodowane np. elektronami δ mogą nie być obserwowane w detektorze (energia „wycieka” z wyemitowanymi elektronami).
- Detektory mierzą energię faktycznie zdeponowaną, która różni się od energii straconej przez cząstkę.
- Praktyczny sposób: bierzemy pod uwagę tylko te przekazy energii, które są mniejsze od pewnej wartości progowej (obcinamy rozkład dE/dx)
- Obcięte (*truncated*) straty energii:

$$-\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}\bigg|_{\leq E_{\mathrm{cut}}} = \kappa\left(\ln\frac{2m_e c^2\beta^2\gamma^2 E_{\mathrm{cut}}}{I^2} - \beta^2 - \delta\right)$$

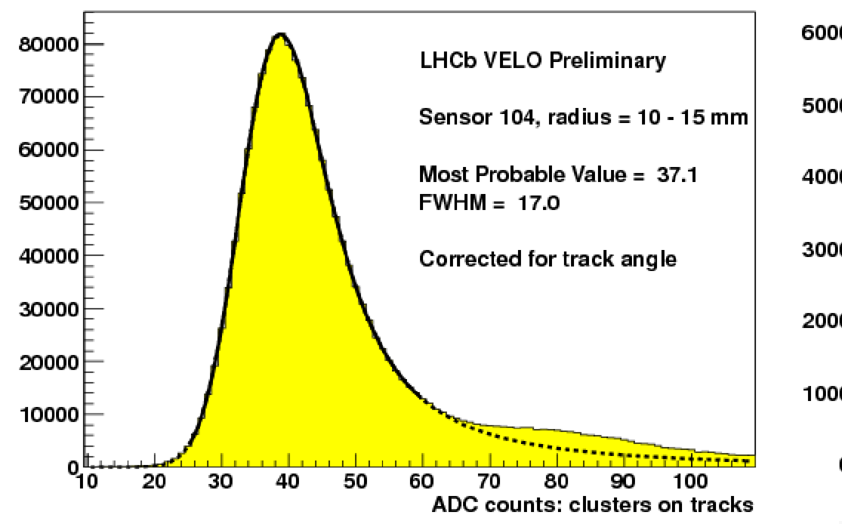
mają mniejszy „ogon” przy wysokich $E_k^{(Max)}$

Rozkład Landau'a

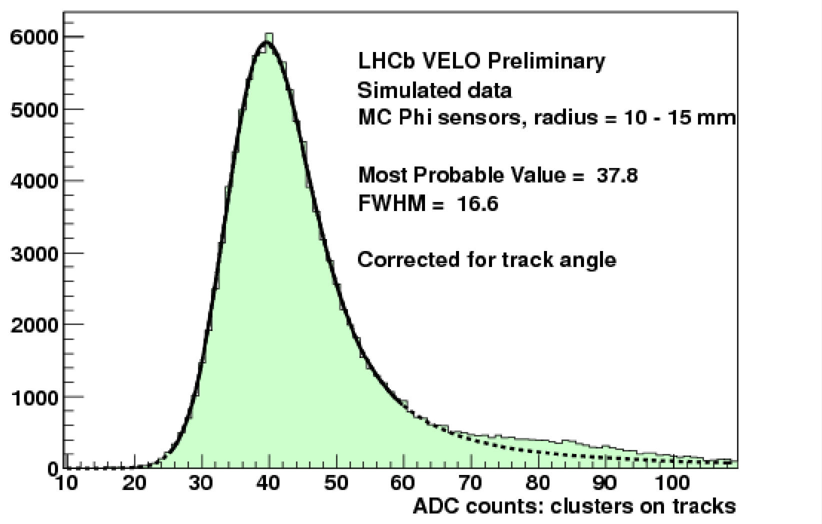


- O ile wartość najbardziej prawdopodobnej straty energii możemy wyznaczyć dość dokładnie, to szerokość rozkładu Landau'a **różni się znacznie** od „teoretycznej"
- Przyjmuje się, że wiąże się to z różnymi efektami aparaturowymi (np. szumy elektroniki odczytu)

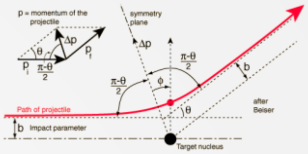
Dane pochodzące z rozproszeń p-p LHC



Symulacja odpowiedzi sensora VELO

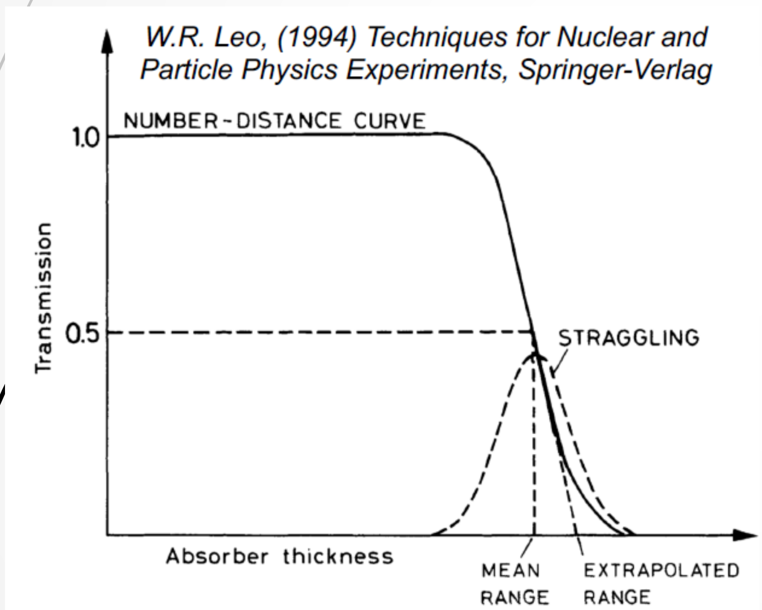


Zasięg



$$R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE$$

- Skomplikowana postać dE/dx -> metody przybliżone



Zasięg:
- średni zasięg R_m
- zasięg ekstrapolowany R_e

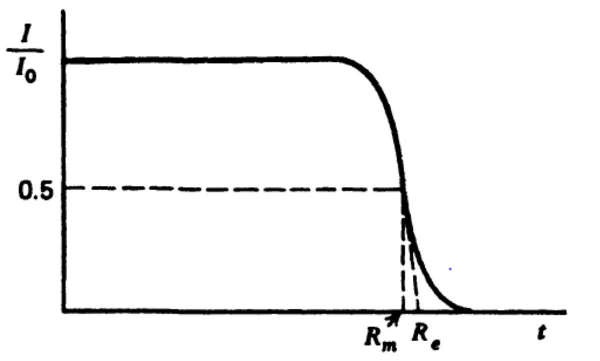
- Zasięg zależy od materiału, rodzaju cząstki i jej energii.
- Zasięg można wyznaczyć mierząc stosunek liczby cząstek, które przeszły przez materiał do początkowej liczby cząstek.
- Spadek jest rozmyty z powodu niejednorodnych strat energii (statystyka).
- Kilkukrotne pomiary dadzą różne zasięgi

Zasięg

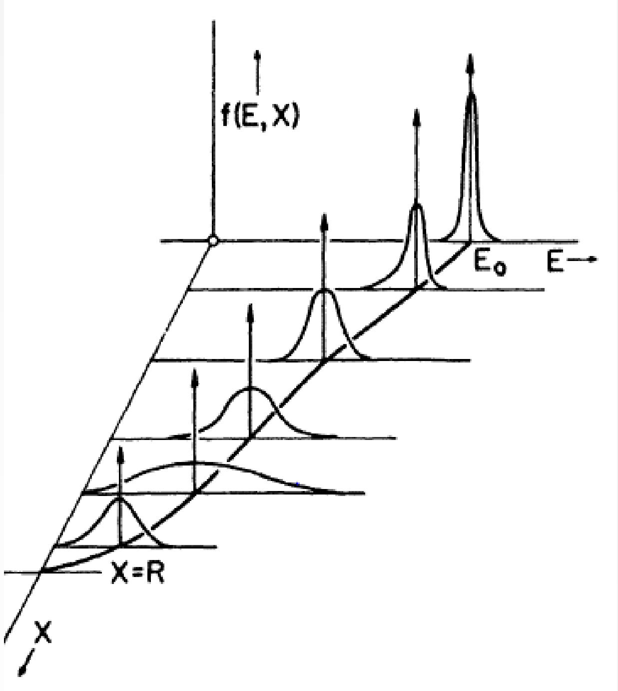
$$R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE$$

- Skomplikowana postać dE/dx -> metody przybliżone

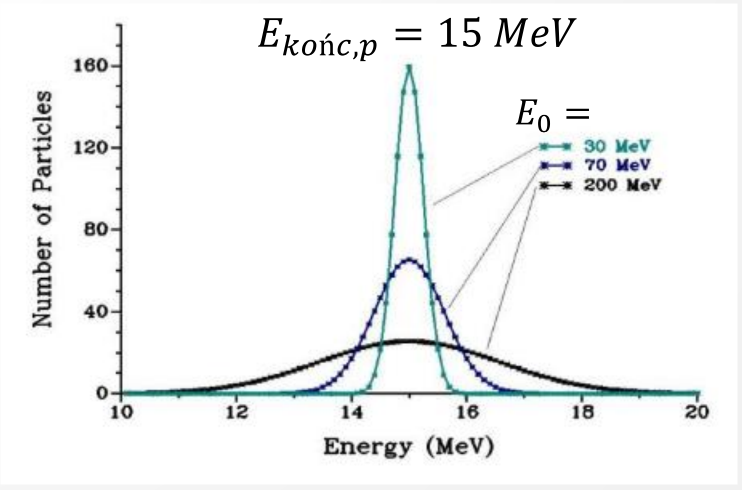
Zasięg cząstek α



Zasięg:
- średni zasięg R_m
- zasięg ekstrapolowany R_e



energy and range stragglig: początkowo monoenergetyczna wiązka rozmywa się w absorberze (procesy oddziaływania są statystyczne)

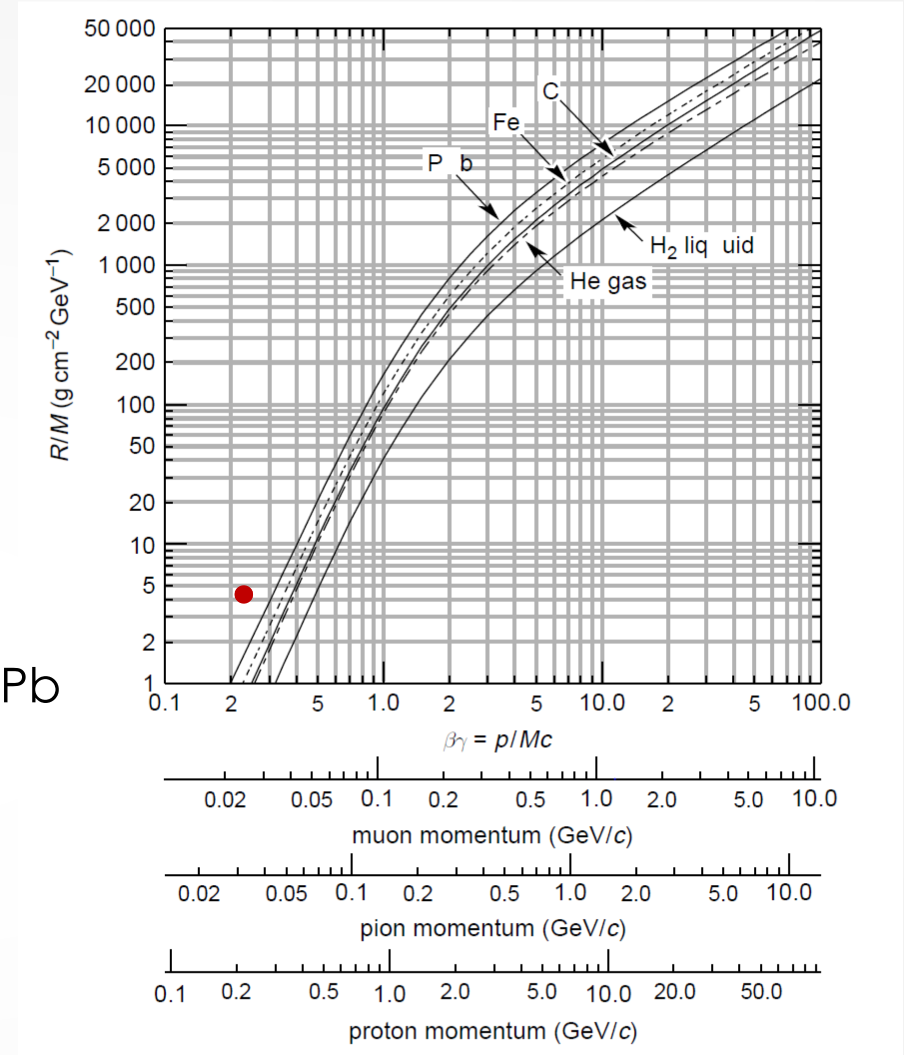


Zasięg

$$\boxed{R = \int_E^0 \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE}$$

$$\left[\frac{1}{\frac{MeV\ cm^2}{g}} = g\ cm^{-2} MeV^{-1} \right]$$

- Dla (np.) protonu o p=1 GeV w Pb ($\rho \approx 11.3$ g/cm^3) odczytujemy: R/M=200 g/cm^{-2}/GeV^{-1}, R=200/11.3 cm ≈ 18 cm



- Obliczenia są dobre dla cząstek, które tracą energię tylko przez jonizację i wzbudzenia:
  - Hadrony o niskich energiach,
  - miony do kilkuset GeV

Zasięg

Practical example: A beam of 600 MeV protons can be "lowered" in energy by passing it through a block of material such as copper and then "cleaned" using a series of analyzing magnets. What thickness of copper would be required to lower the average energy of this beam to 400 MeV?

$$\Delta x = -\int_{600}^{400} \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1} dE$$

Simple rectangular integration with energy intervals of 20 MeV and *dEldx* evaluated in the middle of each interval

Range (MeV)	$\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}$	$\Delta x = \Delta E \left(\frac{1}{\rho}\frac{dE}{dx}\right)^{-1}$
600 – 580	1.768	11.31
580 – 560	1.791	11.17
560 – 540	1.815	11.02
540 – 520	1.841	10.86
520 – 500	1.870	10.69
500 – 480	1.901	10.52
480 – 460	1.934	10.34
460 – 440	1.971	10.15
440 – 420	2.012	9.94
420 – 400	2.056	9.73

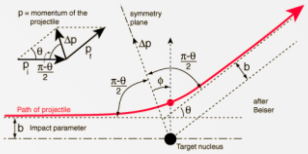
$\Delta x_{\mathrm{total}} = 105.73\ \mathrm{g/cm^2} = 11.88\ \mathrm{cm}$

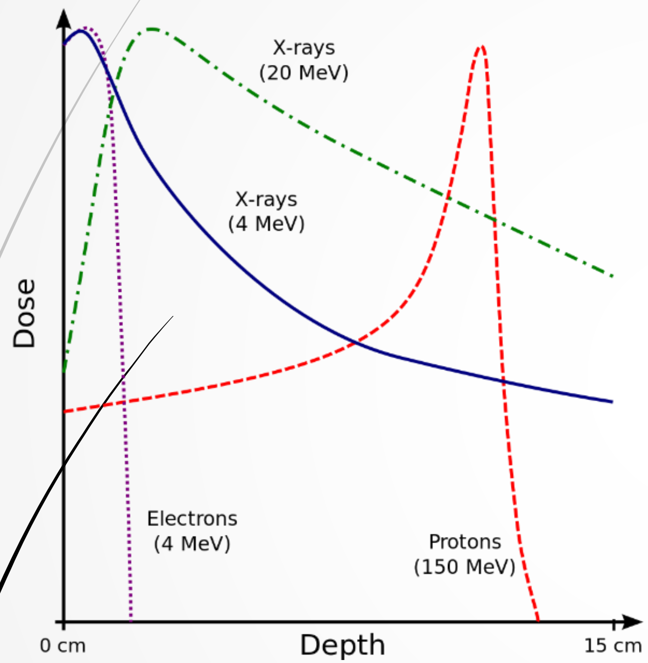
W.R. Leo, (1994) Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer-Verlag

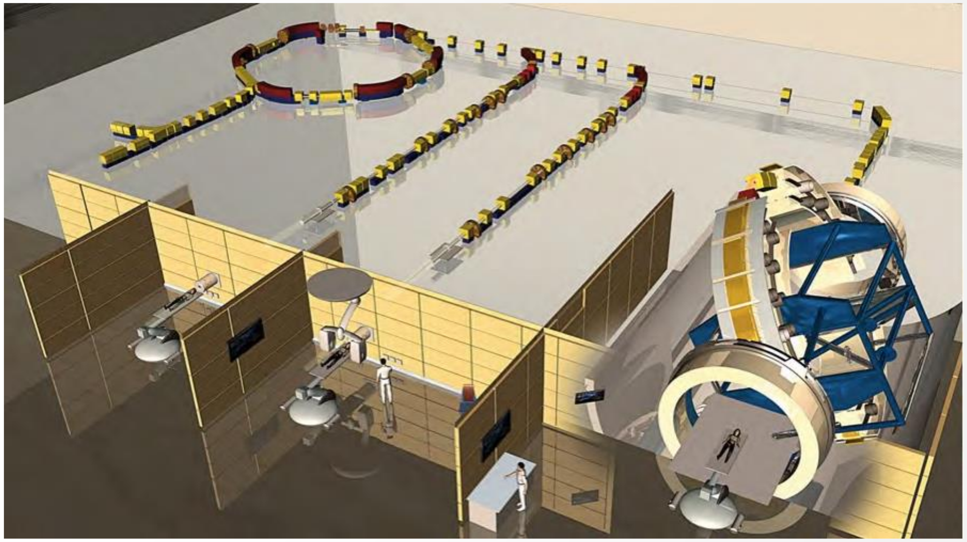
prawo skalowania (reguła Bragga-Kleemana)
dla tych samych cząstek w różnych materiałach

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{\sqrt{A_1}}{\sqrt{A_2}}$$

Krzywa Bragg'a

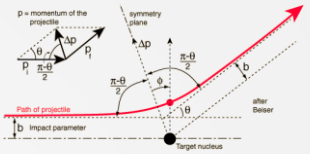






- Dzięki tym cechom, można tak dobrać energię protonów, aby zdeponowały większość swojej energii w precyzyjnie wybranym miejscu (chora tkanka)
- **Centrum Terapii Hadronowej IFJ-PAN**
- Fotony zachowują się inaczej – atenuacja

Krzywa Bragg'a



- Fakt, że przejście przez materiał cząstek naładowanych jest związany ze stratą energii prowadzi do efektu sprzężenia zwrotnego
- Straty energii oznaczają zmniejszenie prędkości cząstki, a co za tym idzie zwiększenie strat jonizacyjnych!
- Fundamentalne znaczenie dla **radioterapii hadronowej**