AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

UCZELNIA BADAWCZA
INICJATYWA DOSKONAŁOŚCI

Wstęp do Modelu Standardowego

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Relatywistyka
Zderzenia cząstek
Pole elektromagnetyczne

agh.edu.pl

Mechanika relatywistyczna

- MS jest opisywany przez równania relatywistyczne.
- Obiekty MS opisywane są w 4-wymiarowej przestrzeni.
  - wektor kontrawariantny (def): $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
  - kowariantny tensor metryczny (def):

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - wektor kowariantny: $x_{\mu} = g_{\mu\nu}\, x^{\nu} == (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$

- Iloczyn skalarny czterowektorów:

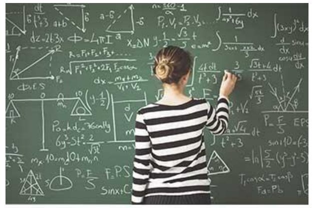
$$x \cdot y = g_{\mu\nu}\, x^{\mu} y^{\nu} = x^{\mu} y_{\mu}$$

Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza jest to takie przekształcenie, które nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów

$$x \to x' = \Lambda\, x$$

$$x' \cdot y' = x \cdot y$$



Pola - wymagania

- Pole $\phi(x^\mu)$ w każdym punkcie czasoprzestrzeni powinno się transformować wzg. transformacji Lorentza (TL) jak: skalar lub wektor lub tensor.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

ten sam punkt czasoprzestrzeni - $\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$

uwaga: współrzędne „' ” odnoszą się zawsze do układu po przekształceniu. np. TL lub symetrii gauge

- Rozważmy teraz małą zmianę pola $\phi(x^\mu)$:

$$\boxed{d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\, dx^\mu}$$

powinna być niezmiennicza wzgl. TL (Lorentz Inwariant – LI)

dx^μ jest 4-wektorem kontrawariantnym,
jakim zatem wektorem powinno być $\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}$?

Pochodne czterowektorów

- Operatory pochodnych (4-gradienty): $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ $\qquad$ $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

  transformują się jak: $\partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \, \partial_\mu$ $\qquad$ $\partial^\mu \longrightarrow \partial'^\mu = \Lambda^\nu_\mu \, \partial^\mu$

  odwrotna TL $\qquad$ TL

niespodziewane?

- Jeśli zatem $\phi(x^\mu)$ jest funkcją skalarną, to pochodne:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla\phi\right) \equiv \partial_\mu \phi \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}, -\nabla\phi\right) \equiv \partial^\mu \phi$$

kontrawariantny 4-wektor $\qquad$ kowariantny 4-wektor

- Operator d'Alamberta: $\Box \equiv g^{\mu\nu}\partial^\mu \, \partial^\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \nabla^2\right)$

  - również jest niezmiennikiem TL

Pola skalarne i wektorowe

- Dla pola ϕ niezmiennicze również są: $\Box\phi = 0$

$$\partial_\mu \phi \, \partial_\mu \phi = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\phi)^2$$

$$\partial_\mu(\partial_\mu \phi) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi$$

- Pole może również być wektorowe, np. 4-potencjał $A^\mu(x^\mu)$:

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$$

dywergencja 4-potencjału:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A}$$

Zderzenia relatywistycznych cząstek

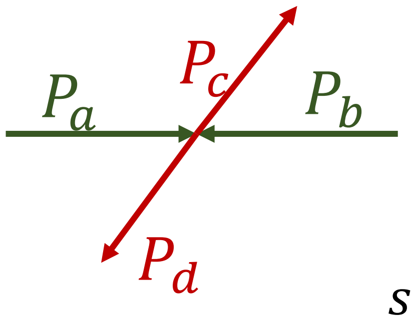
- Czteropęd układu cząstek: $P^{\mu} = P_1^{\mu} + P_2^{\mu} = (1/c\,(E_1 + E_2), \vec{p}_1 + \vec{p}_2)$

  określamy jako masą (niezmienniczą): $m = \sqrt{1/c^2(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}$
- Masa układu jest równa lub większa od sumy mas poszczególnych cząstek (nawet, gdy nie oddziałują).
- Masa układu jest niezmiennicza – wygodny sposób na obliczenia kinematyki procesu w różnych układach.
- Uwaga na różne pojęcia masy:
  - masa relatywistyczna i masa spoczynkowa: $m = m_0\gamma$,
  - masa kwarków? 1/3 masy protonu? Trudna do określenia bez teorii.

- Niezmienniki relatywistyczne (zawsze kombinacja kwadratu 4-pędu):

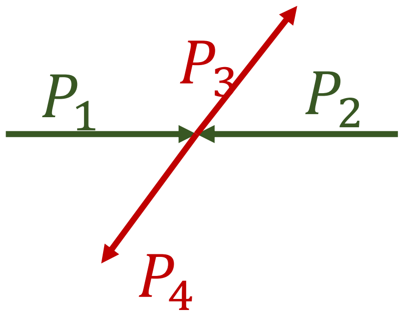
$$\boxed{\begin{array}{ll} s = (P_a + P_b)^2 & s \geq 0 \\ t = (P_c - P_a)^2 & t \leq 0 \\ u = (P_d - P_a)^2 & u \leq 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{gdy } E \gg m, \text{ to:} \\ s \approx 2P_aP_b \\ t \approx -2P_aP_c \\ u \approx -2P_aP_d \end{array}}$$



$$s + t + u = ?$$

Zderzenia relatywistycznych cząstek



- Zderzenia cząstek o czteropędach P_1 i P_1:

  kwadrat czteropędu ($c = 1$): $M^2 \equiv s = (P_1 + P_2)^2$

  - jest to niezmiennik s;
  - jest to masa niezmiennicza układu cząstek 1 i 2:

- Liczymy:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 =$$

$$\dots$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - |\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2| \cos\sphericalangle(\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

- Przy zderzeniach cząstek przeciwbieżnych: $\cos\sphericalangle(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = -1$,

  a dla cząstek relatywistycznych: $E = p$ i mamy: $\boxed{s = 4E_1 E_2}$

Kwadrat sumy czteropędów zderzanych cząstek to niezmiennik s i zarazem masa niezmiennicza tego układu.

Masa układu zależy od kierunku pędów cząstek!

Zderzenia relatywistycznych cząstek

- Wybieramy teraz pewien układ – środka masy, w którym całkowity pęd cząstek wynosi zero:

$$\boxed{\sum \vec{p} = 0}$$

zatem czteropęd zapiszemy jako:

$$P = (E_1^* + E_2^*, 0)$$

- Jeżeli policzymy w nim niezmiennik s, to otrzymamy:

$$\boxed{s = \left(\sum E_i^*\right)^2}$$

$$s = (P_1 + P_2)^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 - \underbrace{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2}_{=0} = \left(\sum E_i^*\right)^2$$

Kwadrat czteropędu układu jest kwadratem całkowitej energii w układzie środka masy (CMS).

MASA układu jest równa całkowitej energii w CMS (układzie środka masy):

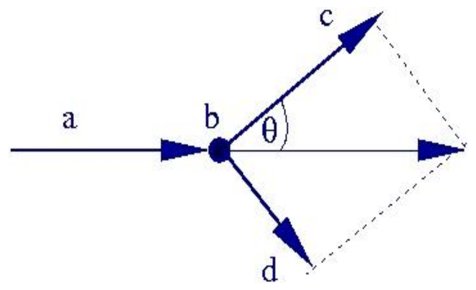
$$m = \sqrt{s} = \sum E_i^*$$

$\sqrt{s}$ jest maksymalną energią w oddziaływaniu, która może być wykorzystana do produkcji nowych stanów.

Zderzenia relatywistycznych cząstek

- Określany jest jako układ, w którym jedna cząstka (tarcza) spoczywa, czyli:

$P_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ $\quad$ $P_2 = (m_2, 0)$



$\boxed{\vec{p}_2 = 0}$

czteropęd układu: $P = (E_1 + m_2, \vec{p}_1)$
a niezmiennik s:

$$s = (P_1 + P_2)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 m_2)$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{2E_1 m_2}$$

Przykłady:

- proton o energii 100 GeV zderza się z tarczą: $\sqrt{s} = \sqrt{2E_p m_p} = 14$ GeV

- dwie wiązki 100 GeV protonów: $\sqrt{s} = 2E = 200$ GeV

W zderzeniach ze stałą tarczą większość energii protonu jest zmarnowana – unoszona jest jako pęd układu, a nie do produkcji nowych cząstek.

Przy projektowaniu eksperymentu należy przeliczyć, co się bardziej „opłaca” ..

jednostki??? naturalnie!

wielkość	zależność	SI	$[\hbar, c. GeV]$	NU $\hbar = c = 1$
Energia	E	$kg\, m^2 s^{-1}$	GeV	GeV
Pęd	$p = E/c$	$kg\, m\, s^{-1}$	GeV/c	GeV
Masa	$E = mc^2$	kg	GeV/c^2	GeV
Czas	$E \cdot t = \hbar/2$	s	$\hbar/GeV$	GeV^{-1}
Długość	$p \cdot x = \hbar/2$	m	$\hbar c/GeV$	GeV^{-1}
Powierzchnia	x^2	m^2	$(\hbar c/GeV)^2$	GeV^{-2}

NU → SI

przemnażamy przez brakujące czynniki

$(c, \frac{1}{c}, ., \hbar, \hbar c)$

Quantity	natural units		SI
energy	GeV		$1.6\ 10^{-10}$ J
momentum	GeV	x 1/c	$5.34\ 10^{-19}$ kg m/s
mass	GeV	x $1/c^2$	$1.78\ 10^{-27}$ kg
time	GeV^{-1}	x ħ	$1.5\ 10^{24}$ s
length	GeV^{-1}	x ħc	0.197 fm
area	GeV^{-1}	x $(\hbar c)^2$	0.389 mb = $0.389\ 10^{-31}$ m^2

Równania Maxwella - porozmawiajmy

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

ρ – gęstość ładunku elektrycznego

$\vec{J}$ - gęstość prądu elektrycznego (zewnętrzne pola)

- Równanie ciągłości (zasada zachowania ładunku): $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$$

(jeśli lokalnie zmniejsza się gęstość ładunku, to jest to źródło (dywergencja) prądu)

Równania Maxwella – relatywistycznie

- RM bez zewnętrznych źródeł: $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

spełnione są przez równania:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}}$$

- Gdy mamy 4-potencjał pola $A^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$

- 4-wektor prądu: $J^{\mu} = (\rho, \vec{J})$

oraz równanie ciągłości: $\frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \;\; lub \;\; \partial_{\mu} J^{\mu} = 0$

a gdy jeszcze definiujemy….

Tensor pola elektromagnetycznego

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}$$

$$F^{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = \cdots$$

- Tensor pola elm jest LI
- Nie zmienia się również, gdy do pola dodamy pochodną dowolnej funkcji $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$

- R. Maxwella (które?) można teraz jeszcze zgrabniej zapisać w postaci:

$$\boxed{\begin{gathered} \partial^\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} J^\nu \\ \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \end{gathered}}$$

- Pamiętamy, że równanie ciągłości musi być spełnione we wszystkich układach, tj. LI

$$\frac{\partial J'^\mu}{\partial x'^\mu} = 0$$

Pole elektromagnetyczne

- Można również zapisać niezmienniki tensorowe:

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

- A klasyczną gęstość lagranżianu: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2\right) \underbrace{- \rho V + \vec{J}\cdot\vec{A}}$

  zapiszemy w postaci:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu}$$

- Lagranżian – funkcja potencjałów (pól), z której wyprowadza się równania ruchu używając równań Eulera-Lagrange'a (zasada najmniejszego działania)

Gęstość lagranżjanu (~lagranżjan)

$$\boxed{\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{en. kinetyczna}} - J_\mu A^\mu}$$

en. kinetyczna oddziaływanie z polem

- Lagranżjan – funkcja potencjałów (pól), z której wyprowadza się równania ruchu używając równań Eulera-Lagrange'a
- Z takiego $\mathcal{L}$ i równań E-L wyprowadzić można równania Maxwella.
- Pole elektromagnetyczne jest polem tensorowym.
- Do potencjału można dodać 4-gradient dowolnej funkcji skalarnej, nie zmieniając przy tym pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$ (transformacja cechowania – gauge): $A^\mu(x') \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x)$.
- Dodatkowo okaże się, że musi być spełniony warunek:

  $\partial_\mu A^\mu = 0$ (cechowanie Lorentza), co da $\Box A^\mu = j^\mu$

  lub $\nabla \vec{A} = 0$ (cechowanie Coulomba)