

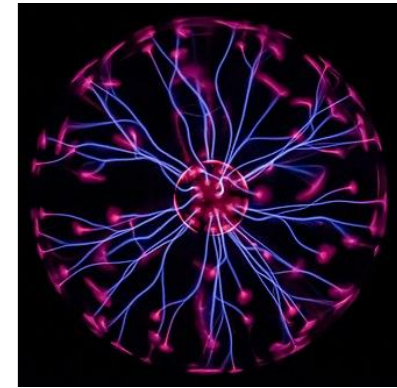
# Wstęp do Modelu Standardowego

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

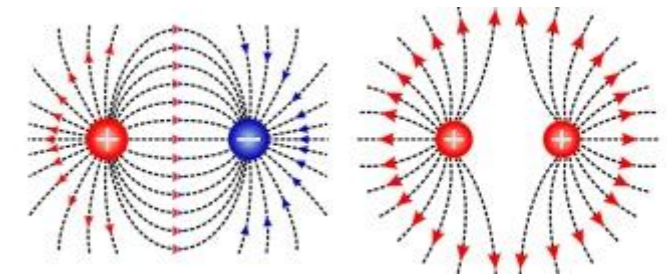
Pole elektromagnetyczne

# Oddziaływania elektromagnetyczne



## 1. Cząstki obdarzone ładunkiem elektrycznym oddziałują elektromagnetycznie:

- ładunki elektryczne się przyciągają i odpychają, siła Coulomba
- elektron związany w atomie,
- atomy tworzące molekuły,
- związki chemiczne, teoria pasmowa ciała stałego,
- ?

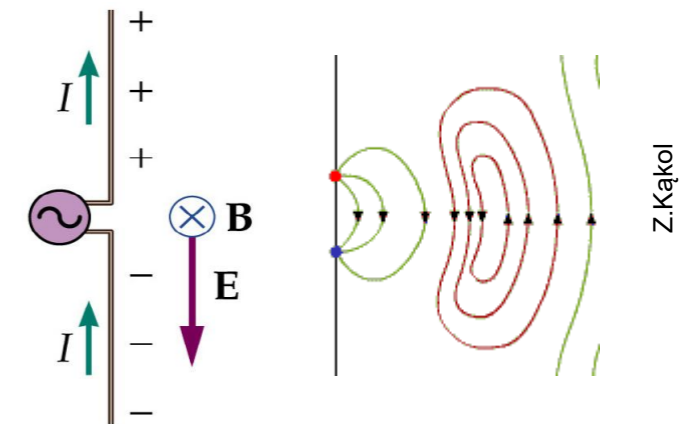


## 2. Pole elektromagnetyczne:

- czy elektryczność i magnetyzm to to samo oddz. elektromagnetyczne?

## 3. Elektromagnetyzm:

- warunkiem propagacji fali elm. jest ruch ładunku elektrycznego,
- jakiego rodzaju jest oddziaływanie pomiędzy spinem a momentem magnetycznym?

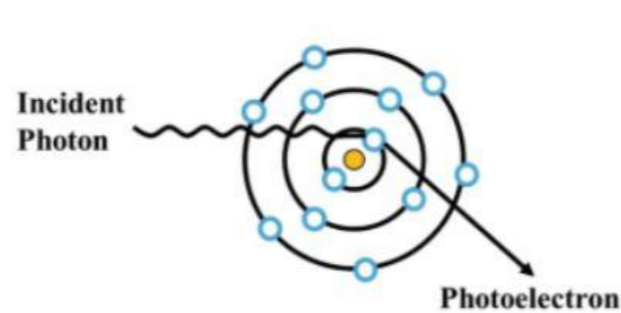


## 4. Model Standardowy:

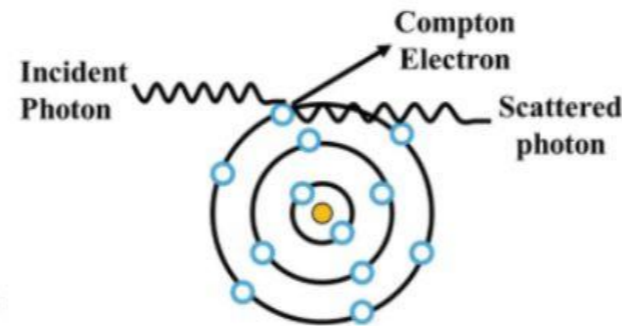
- cząstki z ładunkiem elektrycznym to wzbudzenia pola elektromagnetycznego

# Oddziaływania elektromagnetyczne

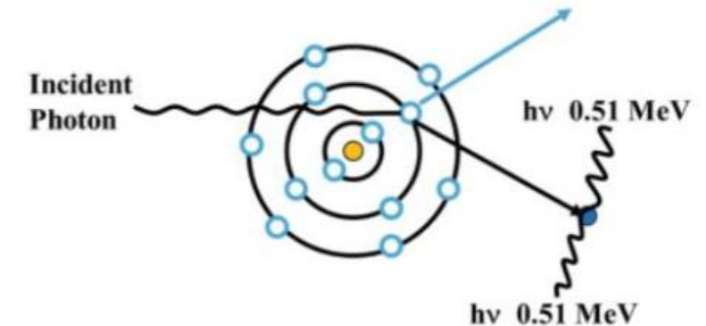
1. Cząstki obdarzone ładunkiem elektrycznym oddziałują elektromagnetycznie:
  - oddziaływania elektromagnetyczne są odpowiedzialne za straty energii przy propagacji cząstek przez materię:



(a) Photoelectric Effect



(b) Compton scattering



(c) Pair Production

2. Oddz. fotonu z materią – wystarczające są obliczenia klasycznego pola elektrostatycznego.
3. Jakich efektów (obserwacji) nie można zapisać przy pomocy siły Coulomba?

# Równania Maxwella

RM w postaci całkowej opisują pola, ich źródła - makroskopowo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_i$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + \mu_0 I$$

RM w postaci różniczkowej opisują mikroskopowo, co jest źródłem pól

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

operator dywergencji opisuje źródłowość pola

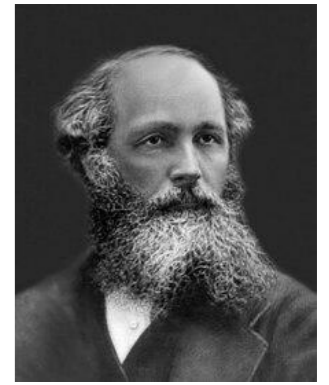
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

operator rotacji opisuje wirowość pola

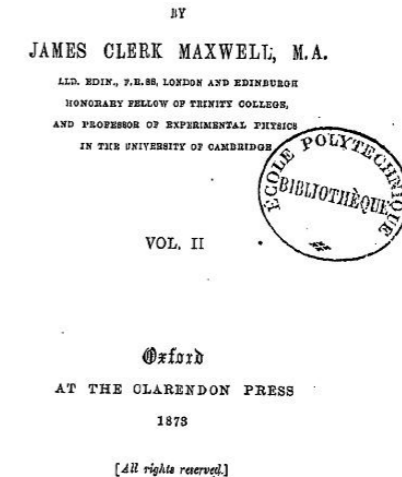
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Clarendon Press Series  
A TREATISE  
ON  
ELECTRICITY AND MAGNETISM



James Clerk Maxwell's  
1873  
A Treatise on Electricity  
and Magnetism



Jak zapisać RM w postaci relatywistycznej:

- czterowektory położenia,
- czterowektory pola?

## Równania Maxwella - porozmawiajmy

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

$\rho$  - gęstość ładunku elektrycznego

$\vec{J}$  - gęstość prądu elektrycznego (zewnętrzne pola)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

- Równanie ciągłości (zasada zachowania ładunku):  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$

*(jeśli lokalnie zmniejsza się gęstość ładunku,  
to jest wypływ prądu (źródło -dywergencja))*

## Równania Maxwella – relatywistycznie

- RM bez zewnętrznych źródeł:  $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$   
spełnione są przez równania:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

- Gdy mamy 4-potencjał pola  $A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$
- 4-wektor prądu:  $J^\mu = (\rho, \vec{J})$

oraz równanie ciągłości:  $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$  lub  $\partial_\mu J^\mu = 0$

a gdy jeszcze definiujemy....

## Tensor pola elektromagnetycznego

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$F^{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = \dots$$

- Tensor pola elektromagnetycznego pokazuje pole elektryczne i magnetyczne w jednym obiekcie
- Tensor pola elm jest LI
- Nie zmienia się również, gdy do pola dodamy pochodną dowolnej funkcji  $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$
- R. Maxwella (które?) można teraz jeszcze zgrabniej zapisać w postaci:

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} J^\nu$$

$$\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0$$

- Pamiętajmy, że równanie ciągłości musi być spełnione we wszystkich układach, tj. LI

$$\frac{\partial J'^\mu}{\partial x'^\mu} = 0$$



# Tensor elektromagnetyczny



$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$$

$$F^{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = \dots$$

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0 = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x^i} = -E^i$$

$$\text{Stąd } F^{0i} = -E^i \text{ ; } F^{i0} = E^i$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = \epsilon_{ijk} B^k$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$



## Pole elektromagnetyczne

- Można również zapisać niezmienniki tensorowe:

$$\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2 = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2c} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

- A klasyczną gęstość lagranżjanu:  $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}^2) - \underbrace{\rho V + \vec{J} \cdot \vec{A}}$

zapiszemy w postaci:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_{\mu} A^{\mu}$$

- Lagranżjan – funkcja potencjałów (pól), z której wyprowadza się równania ruchu używając równań Eulera-Lagrange’a (zasada najmniejszego działania)

## Gęstość lagranżjanu (~lagranżjan)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$$

en. kinetyczna

oddziaływanie z polem



- Lagranżjan – funkcja potencjałów (pól), z której wyprowadza się równania ruchu używając równań Eulera-Lagrange’a
- Z takiego  $\mathcal{L}$  i równań E-L wyprowadzić można równania Maxwella.
- Pole elektromagnetyczne jest polem tensorowym.

Wnioski do tej pory:

- udało się przedstawić równania Maxwella w sposób relatywistyczny,
- w następnym kroku należy zbudować z relatywistycznych pól pola kwantowe (elektrodynamika kwantowa QED)
- najpierw jednak wróćmy do elektronu i jego oddziaływania (żeby było wiadomo, do czego zmierzamy)

# Oddziaływania elektromagnetyczne

Trzy procesy elektromagnetyczne dla elektronu:

- rozpraszanie elektronów i pozytonów poprzez wymianę fotonu
- absorpcja i emisja fotonu
- tworzenie i anihilacja par elektron-pozyton

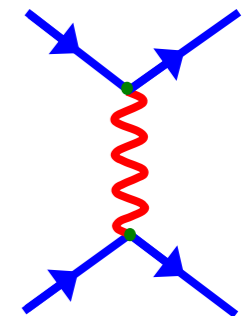
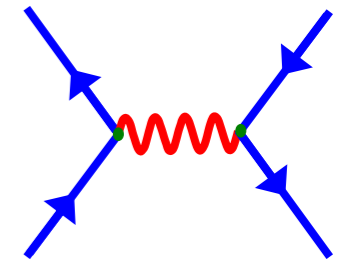
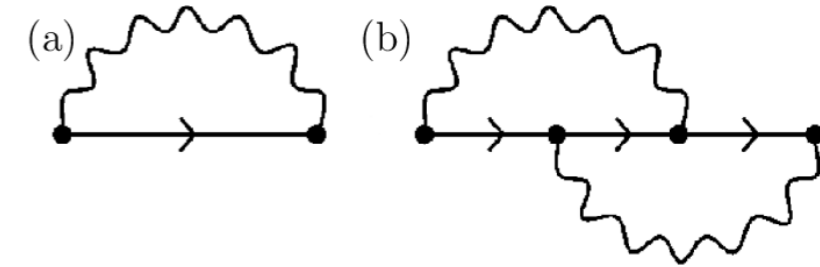
Diagramy Feynmana to graficzna reprezentacja procesów w kwantowej teorii pola

- reprezentują amplitudy przejścia w procesach
- pozwalają na obliczenia elementów macierzy rozpraszania w teorii perturbacyjnej

Każde rzeczywiste oddziaływanie (np. **rozpraszanie** elektron-proton) składa się z:

- **dwóch linii zewnętrznych** reprezentujących funkcje falowe cząstek,
- dwóch wierzchołków (wertexów), każdy proporcjonalny do siły oddziaływania,
- **linii wewnętrznej** opisującej wirtualną wymienianą cząstkę.

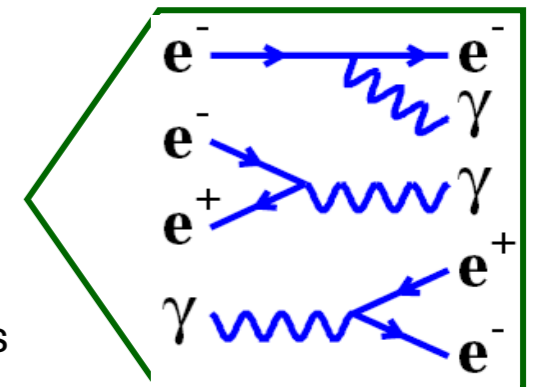
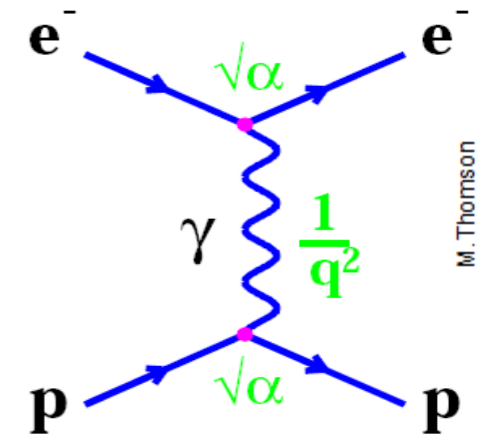
Werteksy i strzałki są tylko symbolami, nie reprezentują śladów cząstek w przestrzeni.



# Diagramy Feynmana

Rozpraszanie elektronów na protonach:

- Diagramy czytamy od lewej do prawej strony (strzałka czasu) – z lewej strony mamy cząstki przed oddziaływaniem, z prawej – po nim (czasem konwencja biegu czasu góra-dół).
- Z lewej strony wierzchołka - strzałka skierowana do wierzchołka oznacza cząstkę wchodzącą do oddziaływania, strzałka od wierzchołka reprezentuje antycząstkę wchodzącą do oddziaływania.
- Z prawej strony (czyli po oddziaływaniu) – odpowiednio odwrotnie.
- Pojedynczy wierzchołek nie reprezentuje rzeczywistego procesu fizycznego.
- Linie na diagramach Feynmana nie są śladami cząstek!
- Używamy tu konwencji, że czas biegnie poziomo.
- Co matematycznie (fizycznie) oznaczają linie, fale, wertyxy?
  - linie zewnętrzne – funkcja opisująca cząstkę (dla fermionów – rozwiązanie r. Diraca)
  - wierzchołki – siła oddziaływania, sprzężenie, liczba określająca jak silny jest proces
  - linie, fale wewnętrzne – propagator cząstki pośredniczącej (wirtualnej)

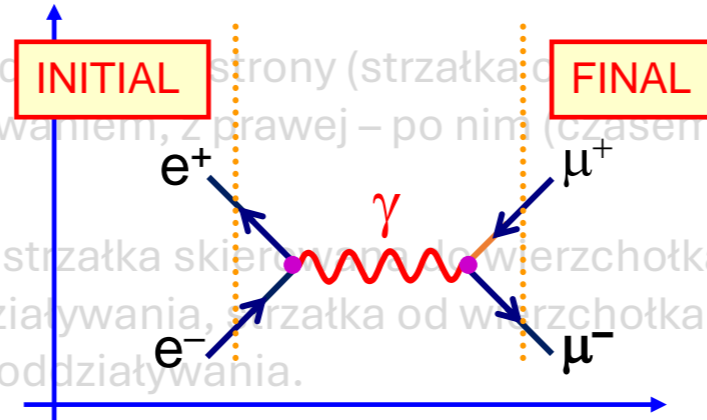


A teraz popatrzmy na niezwykle cechy diagramów Feynmana:

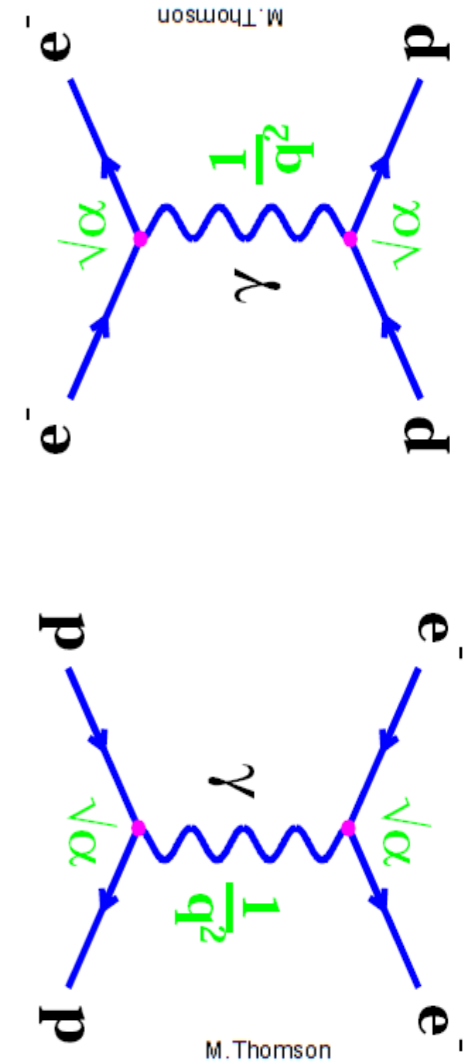
# Diagramy Feynmana

## Anihilacja elektron-pozyton

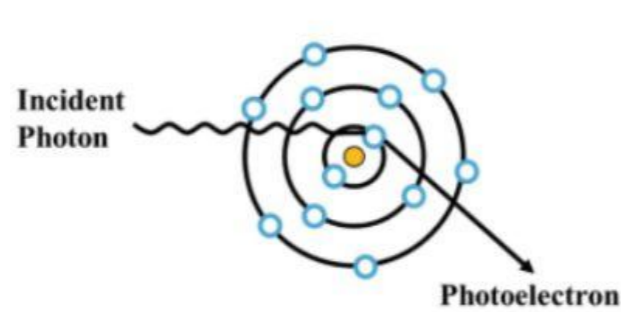
- Diagramy czytamy od lewej do prawej strony (strzałka czasu). Na lewej stronie mamy cząstki przed oddziaływaniem, z prawej – po nim (czasem konwencja biegu czasu góra-dół).
- Z lewej strony wierzchołka - strzałka skierowana do wierzchołka oznacza cząstkę wchodzącą do oddziaływania, strzałka od wierzchołka reprezentuje antycząstkę wchodzącą do oddziaływania.
- Z prawej strony (czyli po oddziaływaniu) – odpowiednio odwrotnie.



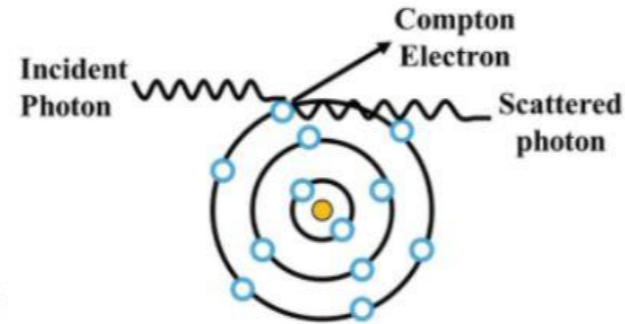
## Anihilacja proton-antyproton:



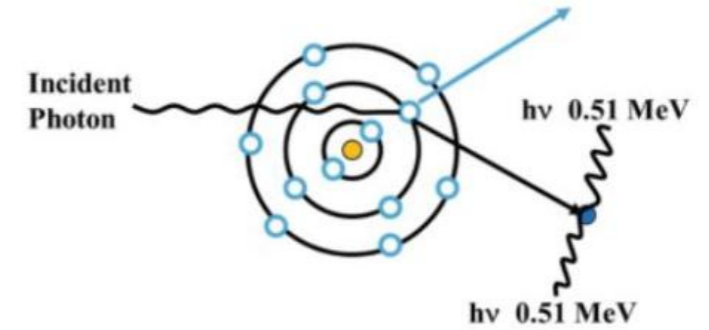
# Oddziaływania elektromagnetyczne



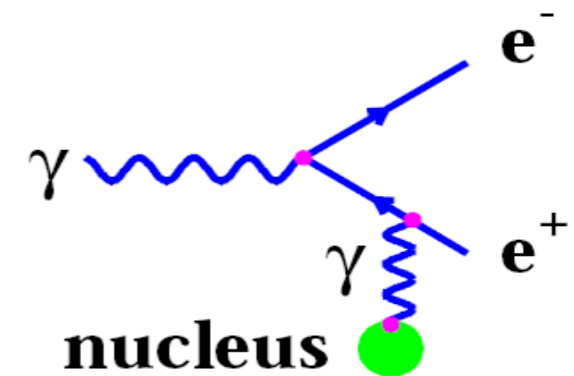
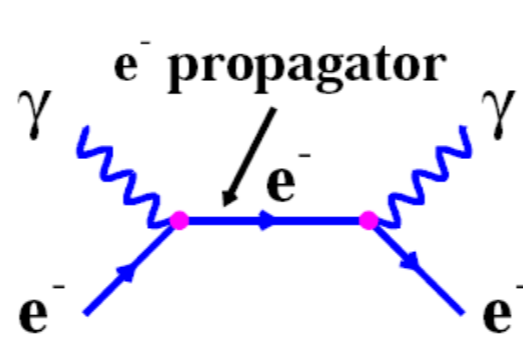
(a) Photoelectric Effect



(b) Compton scattering



(c) Pair Production



## Amplituda procesu i przekrój czynny

- **Złota reguła Fermiego** podaje przepis na prawd-two przejścia dla reakcji na jednostkę czasu (w odniesieniu do 1. cząstki tarczy), czyli na  $W$ :

$$W = \Gamma_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2 \rho(E_i)$$

$T_{fi}$  - element macierzowy amplitudy przejścia  $i \rightarrow f$ ,

$$T_{fi} = \langle f | \widehat{H}' | i \rangle$$

$\widehat{H}'$  - hamiltonian oddziaływania (fizyka!)

} przewidywania, teoria!

- Szybkość przejścia zależy zatem od:
  - ✓ macierzy przejścia (teoria oddziaływań, dynamika procesu)  $T_{fi}$ ,
  - ✓ liczby dostępnych stanów (zasady zachowania), która zależy od kinematyki  $\rho(E_i)$
  - ✓ postaci stanów  $|i\rangle$  i  $|f\rangle$  (np. funkcja falowa)

$$\sigma = \frac{|M_{fi}|^2}{\text{flux}} \times (\text{phase space})$$

## Amplituda procesu i przekrój czynny

- Przekrój czynny  $\sigma$  to mierzalna wielkość opisująca prawdopodobieństwo zajścia danego procesu:

$$\sigma = \frac{|T_{fi}|^2}{\text{strumień cząstek}}$$

- Strumień  $J$  zależy od pędu, objętości, etc (nie jest LI):

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \frac{\rho_f}{J}$$

- A zatem elementy kinematyczne zależą od obliczeń procesu w konkretnym układzie, np. dla rozproszenia:

$$\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \int |M_{fi}|^2 d\Omega^*$$

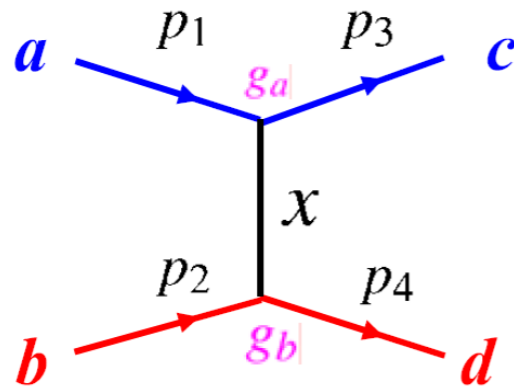
prawdopodobieństwo procesu zależy od kwadratu amplitudy tego procesu.

zajmiemy się amplitudami na proces rozpraszania i anihilacji elektronów:



# Diagramy Feynmana

Rozpraszanie elektronów



przekaz czteropędu:  $q = p_3 - p_1 = p_4 - p_2$

$$p_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad p_3 = (E_3, \vec{p}_3)$$

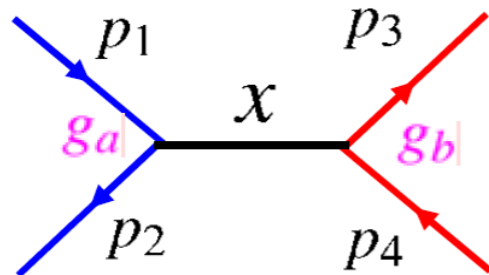
$$q^2 = (E_3 - E_1)^2 - (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)^2 \equiv t \leq 0$$

$$q^2 < 0$$

(t-channel)

- „przestrzenny” (space-like)
- procesy emisji i absorpcji zachodzą w tym samym **czasie**

Anihilacja elektron-pozyton:



energia w ukł. śr. masy

$$q = p_1 + p_2 = p_3 - p_4 \equiv s \quad (\text{s-channel})$$

$$q^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \approx 4E^2$$

- „czasowy” (time-like) składowa „czasowa” jest większa niż przestrzenna
- procesy anihilacji i kreacji zachodzą w tym samym **miejscu**

## Oddziaływania elektromagnetyczne



- Jak teraz powiązać diagram Feynmana z relatywistycznymi równaniami Maxwella?
- Pamiętamy, że w MS mamy pola, a cząstki mają być wzbudzeniem tego pola.
- Oddz. elektromagnetyczne są tu wzorcem – bardzo dobrze znamy pole, mamy świetne wyniki doświadczalne, a QED jest najlepszą teorią.

- Oddziaływanie pomiędzy fotonem i naładowaną cząstką uzyskamy poprzez wprowadzenie podstawień:

$$\text{-pola: } \vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}; \quad E \rightarrow E - q\phi$$

$$\text{-operatory: } \vec{p} = -i\vec{\nabla}; \quad E = i\partial/\partial t$$

- oznacza to transformację cechowania (gauge) pola:  $A_\mu = (\phi, -\vec{A}); \quad \partial_\mu = (\partial/\partial t, +\vec{\nabla})$

$$i\partial_\mu \rightarrow i\partial_\mu - qA_\mu$$

- oraz w równaniu Diraca:

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi + im\psi = 0 \quad \longrightarrow \quad \gamma^\mu \partial_\mu \psi + iq\gamma^\mu A_\mu \psi + im\psi = 0$$



## Oddziaływanie elektronu z fotonem

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma^0 \hat{H} \psi = m\psi - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi + q\gamma^\mu A_\mu \psi$$

$$\times \gamma^0 : \quad \hat{H} \psi = \underbrace{(\gamma^0 m - i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{en. kinetyczna}} \psi + \underbrace{q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu}_{\text{en. potencjalna}} \psi$$

- En. potencjalna cząstki o spinie 1/2 w polu elektromagnetycznym:

$$\hat{V}_D = q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu$$

$$q\gamma^0 \gamma^0 A_0 = q\phi$$

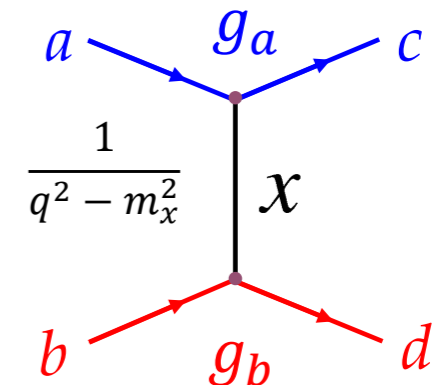
foton:

$$A_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

- Element macierzowy (p. diagram Feynmana) jest wyrażany przez:

$$M = \underbrace{\langle \psi_c | V | \psi_a \rangle}_{g_a} \frac{1}{q^2 - m_x^2} \underbrace{\langle \psi_d | V | \psi_b \rangle}_{g_b}$$

propagator  
(cząstka pośrednicząca)



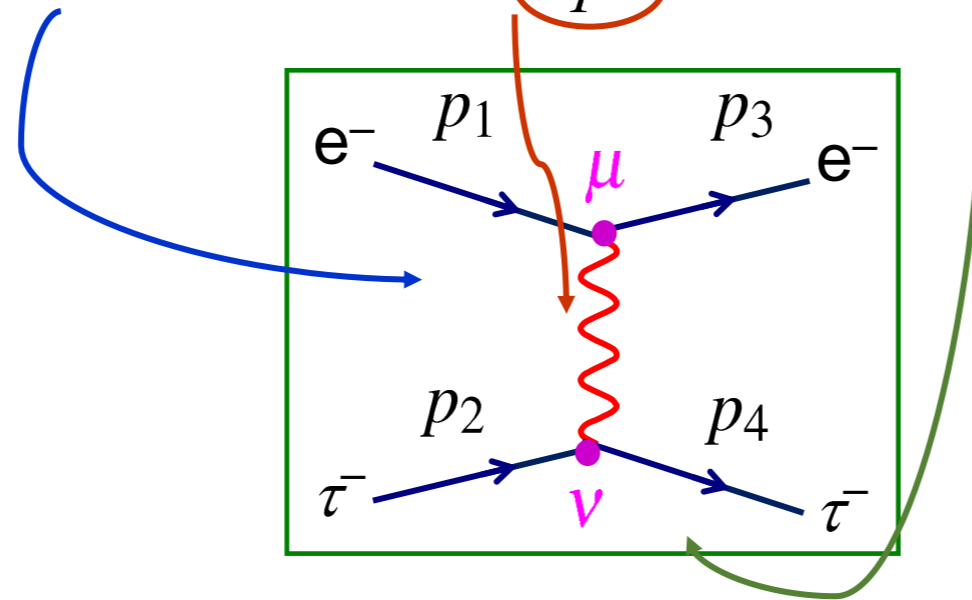
# Oddziaływanie elektronu z fotonem



- Element macierzowy oddziaływania dwóch fermionów poprzez wymianę fotonu (wirtualnego)::

$$M = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_x^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle$$

$$M = [u_e^\dagger(p_3) q_e \gamma^0 \gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} [u_\tau^\dagger(p_4) q_\tau \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$



$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$



## Oddziaływanie elektronu z fotonem

- Element macierzowy oddziaływania dwóch fermionów poprzez wymianę fotonu (wirtualnego):

$$M = [u_e^\dagger(p_3)q_e\gamma^0\gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} [u_\tau^\dagger(p_4)q_\tau\gamma^0\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

- Definiując spinor sprzężony:  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

amplituda zyskuje na prostocie:

$$M = [\bar{u}_e(p_3)q_e\gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} [\bar{u}_\tau(p_4)q_\tau\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

a zapisując prąd jako:

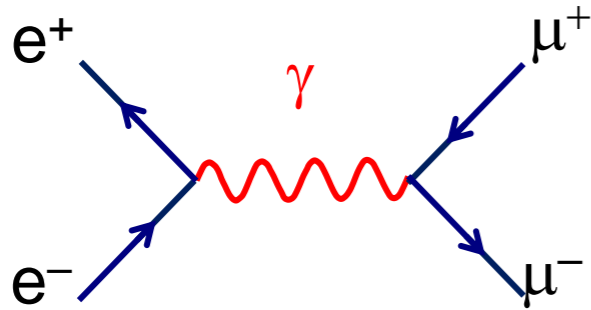
$$j_e^\mu = \bar{u}_e(p_3)\gamma^\mu u_e(p_1) \quad j_\tau^\nu = \bar{u}_\tau(p_4)\gamma^\nu u_\tau(p_2)$$







amplituda procesu elektromagnetycznego wygląda tak:

$$M = -q_e q_\tau \frac{j_e \cdot j_\tau}{q^2}$$

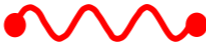

# Reguły diagramów Feynmana

- Linie zewnętrzne – cząstki rzeczywiste:



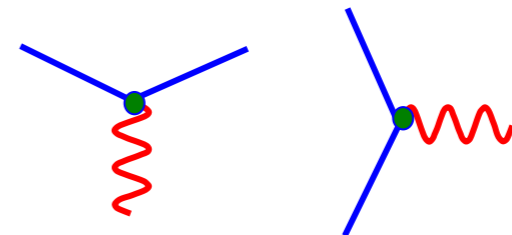
spin 1/2	}	cząstka wchodząca	$u(p)$	
		cząstka wychodząca	$\bar{u}(p)$	
		antycząstka wchodząca	$\bar{v}(p)$	
		antycząstka wychodząca	$v(p)$	
spin 1	}	foton wchodzący	$\epsilon^\mu(p)$	
		foton wychodzący	$\epsilon^\mu(p)^*$	

- Linie wewnętrzne (propagatory – wirtualne cząstki pośredniczące)

spin 1	foton	$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$	
spin 1/2	fermion	$\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$	

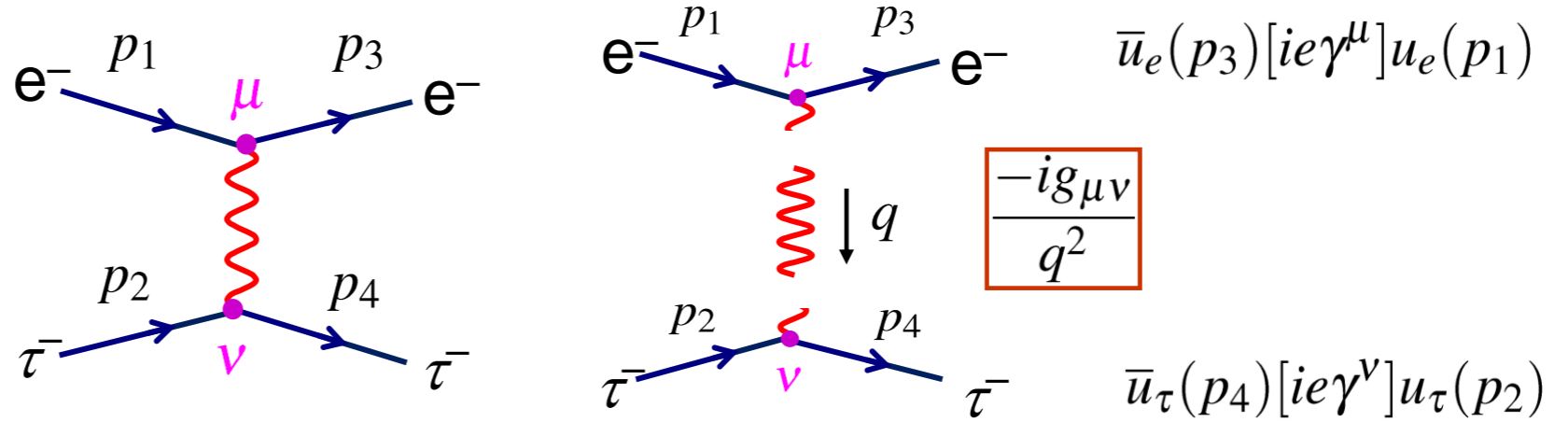
- Wierzchołki (siła oddziaływania, coupling constant  $\alpha$ )

fermion spin  $\frac{1}{2}$ ,  $q = -e$   $ie\gamma^\mu$

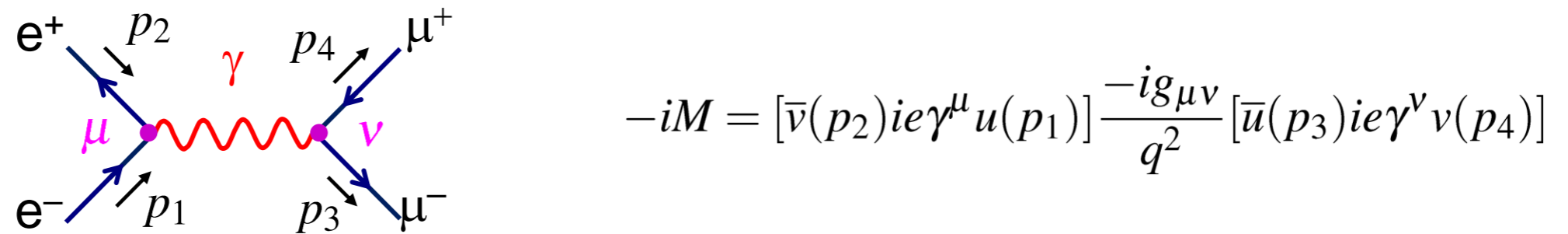


# Diagramy i amplituda procesu

- Rozpraszanie fermionów:



- Anihilacja fermionów:



## W podsumowaniu\*

\*Część obliczeń i rysunków zaczerpnięta została z wykładów Marka Thomsona

1. Cząstki obdarzone ładunkiem elektrycznym oddziałują elektromagnetycznie, potencjał jest świetnie wliczalny z elektrostatyki.
2. Znamy bardzo dobrze lagranżjan pola elektromagnetycznego  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu$
3. Umiemy napisać równania Maxwella w postaci kowariantnej (czyli relatywistycznej).
4. Zapewnienie niezmienniczości lagranżjanu względem transformacji cechowania  $A^\mu(x') \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x)$  wprowadziło oddziaływanie elektronu z fotonem.
5. Złota Reguła Fermiego pozwala na powiązanie fizyki oddziaływania (amplituda z obserwowanym procesem (przekrój czynny).
6. Diagramy Feynmana pozwalają w elegancki sposób powiązać amplitudę procesu i funkcje opisujące cząstki biorące udział w procesie

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \frac{\rho_f}{J}$$

$$M = -q_e q_\tau \frac{j_e \cdot j_\tau}{q^2}$$

