Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie
AGH University of Krakow

Wstęp do Modelu Standardowego

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

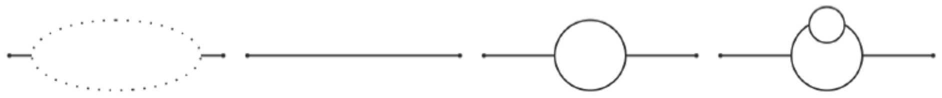
Pole
Równania Maxwella
Tensor pola elektromagnetycznego
Lagranżian

Struktura Modelu Standardowego

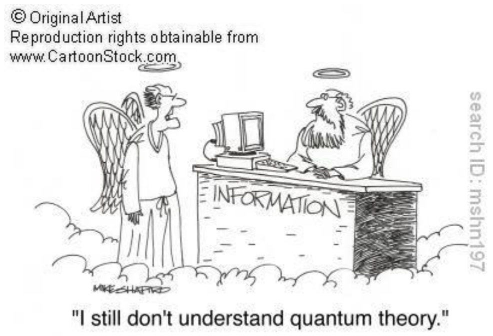
- MS jest to MODEL, a nie TEORIA.
- MS jest to efektywna teoria, w której istotną rolę odgrywają wyniki doświadczalne (np. masa elektronu, stałe sprzężenia, etc.).

  Teoria strun (dla odmiany) nie potrzebuje wyników – jest wyprowadzana z czysto matematycznych przesłanek.
- MS oparty jest na teorii, w której liczba cząstek nie jest stała, ale są one nieustannie tworzone i ciągle anihilują.

  tą teorią nie jest Mechanika Kwantowa, ani Relatywistyczna MK
- MS oparty jest na Kwantowej Teorii Pola (QFT).



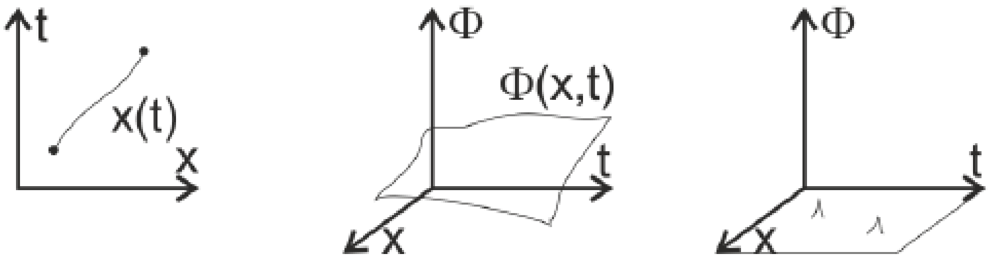
$$MS(QFT) = QM + RM$$



QFT – zwiastuny

QFT czerpie z mechaniki klasycznej, mechaniki kwantowej i mechaniki relatywistycznej

1. Cząstka porusza się po czasoprzestrzennej trajektorii opisanej funkcją $x(t)$, czas jest tu parametrem.
2. Pole to obiekt opisany funkcją $\Phi(x, t)$. Zupełnie różny od cząstek.
3. Ale czasem występują małe fluktuacje tego pola, i je przypiszemy powstaniu cząstek.



1. QFT to teoria uwzględniająca spin, identyczność cząstek, zjawiska perturbacyjne i nieperturbacyjne.
2. QFT opisuje cząstki o spinie 0 (skalary), 1/2 (fermiony) oraz 1 (cząstki wektorowe – bozony cechowania, czyli przenoszące oddziaływania).

Pola - wymagania

- Pole $\phi(x^\mu)$ w każdym punkcie czasoprzestrzeni powinno się transformować wzg. transformacji Lorentza (TL) jak: skalar lub wektor lub tensor.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

ten sam punkt czasoprzestrzeni - $\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$

uwaga: współrzędne „' " odnoszą się zawsze do układu po przekształceniu. np. TL lub symetrii gauge

- Rozważmy teraz małą zmianę pola $\phi(x^\mu)$:

$$\boxed{d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}\, dx^\mu}$$

powinna być niezmiennicza wzgl. TL (Lorentz Inwariant – LI)

dx^μ jest 4-wektorem kontrawariantnym,
jakim zatem wektorem powinno być $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$?

Pochodne czterowektorów

- Operatory pochodnych (4-gradienty): $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$ $\quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

  transformują się jak: $\partial_\mu \longrightarrow \partial'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu\, \partial_\mu$ $\quad \partial^\mu \longrightarrow \partial'^\mu = \Lambda^\nu_\mu\, \partial^\mu$

  odwrotna TL $\qquad$ TL

niespodziewane?

- Jeśli zatem $\phi(x^\mu)$ jest funkcją skalarną, to pochodne:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \nabla\phi\right) \equiv \partial_\mu\phi \qquad \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}, -\nabla\phi\right) \equiv \partial^\mu\phi$$

kontrawariantny 4-wektor $\qquad$ kowariantny 4-wektor

- Operator d'Alamberta: $\Box \equiv g^{\mu\nu}\partial^\mu\, \partial^\mu = \partial_\mu \partial^\mu = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \nabla^2\right)$

  - również jest niezmiennikiem TL

Pola skalarne i wektorowe

- Dla pola ϕ niezmiennicze również są: $\Box\phi = 0$

$$\partial_\mu \phi \, \partial_\mu \phi = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\phi)^2$$

$$\partial_\mu\left(\partial_\mu \phi\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2\phi$$

- Pole może również być wektorowe, np. 4-potencjał $A^\mu(x^\mu)$:

$$A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$$

dywergencja 4-potencjału:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{A}$$

Równania Maxwella - porozmawiajmy

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho \qquad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

ρ – gęstość ładunku elektrycznego

$\vec{J}$ - gęstość prądu elektrycznego (zewnętrzne pola)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

- Równanie ciągłości (zasada zachowania ładunku): $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0$

(jeśli lokalnie zmniejsza się gęstość ładunku,
to jest to źródło (dywergencja) prądu)

Równania Maxwella – relatywistycznie

- RM bez zewnętrznych źródeł: $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

spełnione są przez równania:

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial A}{\partial t} \end{aligned}}$$

- Gdy mamy 4-potencjał pola $A^\mu = \left(\frac{1}{c}\phi, \vec{A}\right)$

- 4-wektor prądu: $J^\mu = (\rho, \vec{J})$

oraz równanie ciągłości: $\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \;\; lub \;\; \partial_\mu J^\mu = 0$

a gdy jeszcze definiujemy….

Tensor pola elektromagnetycznego

$$\boxed{F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}}$$

$$F^{0i} = \frac{\partial A_i}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^i} = \cdots$$

- Tensor pola elm jest LI
- Nie zmienia się również, gdy do pola dodamy pochodną dowolnej funkcji $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \chi$

- R. Maxwella (które?) można teraz jeszcze zgrabniej zapisać w postaci:

$$\boxed{\begin{gathered}\partial^\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} J^\nu \\ \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0\end{gathered}}$$

- Pamiętamy, że równanie ciągłości musi być spełnione we wszystkich układach, tj. LI

$$\frac{\partial J'^\mu}{\partial x'^\mu} = 0$$

agh.edu.pl

Pole elektromagnetyczne

- Można również zapisać niezmienniki tensorowe:

$$\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2 = \frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = \frac{1}{2c}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

- A klasyczną gęstość lagranżianu: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2\right) - \rho V + \vec{J}\cdot\vec{A}$

  zapiszemy w postaci:

$$\boxed{\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_\mu A^\mu}$$

- Lagranżian – funkcja potencjałów (pól), z której wyprowadza się równania ruchu używając równań Eulera-Lagrange'a (zasada najmniejszego działania)

Gęstość lagranżianu (~lagranżian)

$$\boxed{\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}}_{\text{en. kinetyczna}} - J_\mu A^\mu}$$

oddziaływanie z polem

- Lagranżian – funkcja potencjałów (pól), z której wyprowadza się równania ruchu używając równań Eulera-Lagrange'a
- Z takiego $\mathcal{L}$ i równań E-L wyprowadzić można równania Maxwella.
- Pole elektromagnetyczne jest polem tensorowym.
- Do potencjału można dodać 4-gradient dowolnej funkcji skalarnej, nie zmieniając przy tym pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$ (transformacja cechowania – gauge): $A^\mu(x') \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi(x)$.
- Dodatkowo okaże się, że musi być spełniony warunek:

  $\partial_\mu A^\mu = 0$ (cechowanie Lorentza), co da $\Box A^\mu = j^\mu$

  lub $\nabla \vec{A} = 0$ (cechowanie Coulomba)