



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

Wstęp do Modelu Standardowego

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Mechanika klasyczna

- Lagranżjan
- Hamiltonian
- Zasada najmniejszego działania

Lagranżjany pól

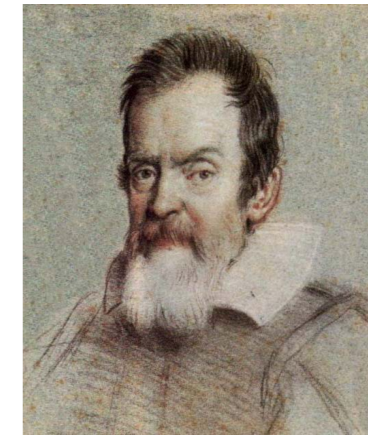
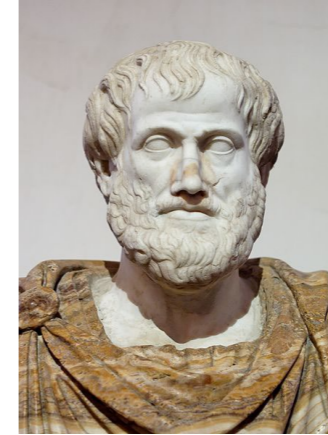
Równanie Schrödingera

Równanie Kleina-Gordona

Mechanika klasyczna

Mechanika klasyczna – nauka o ruch ciał:

- Arystoteles (384-322 p.n.e) – ruch jednostajny prostoliniowy wymaga siły.
- Galileusz (1564-1642) współczesne podejście do mechaniki, ruch wahadła, spadek ciał.
- Isaac Newton (1642-1727) – zasady dynamiki.



Alternatywne podejście do mechaniki:

- Joseph Louis Lagrange (1736-1813)
- William Rowan Hamilton (1805-1865)



Ograniczenia mechaniki klasycznej:

- ciała poruszające się z $v < c$ (mech. relatywistyczna, A. Einstein, 1905).
- ruch w skali atomowej i subatomowej (mech. kwantowa, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, 1925).



na dzisiaj

Mechanika klasyczna

- Zasady dynamiki w różnych postaciach:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

- Równanie ruchu: $\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m}$ lub $m\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$

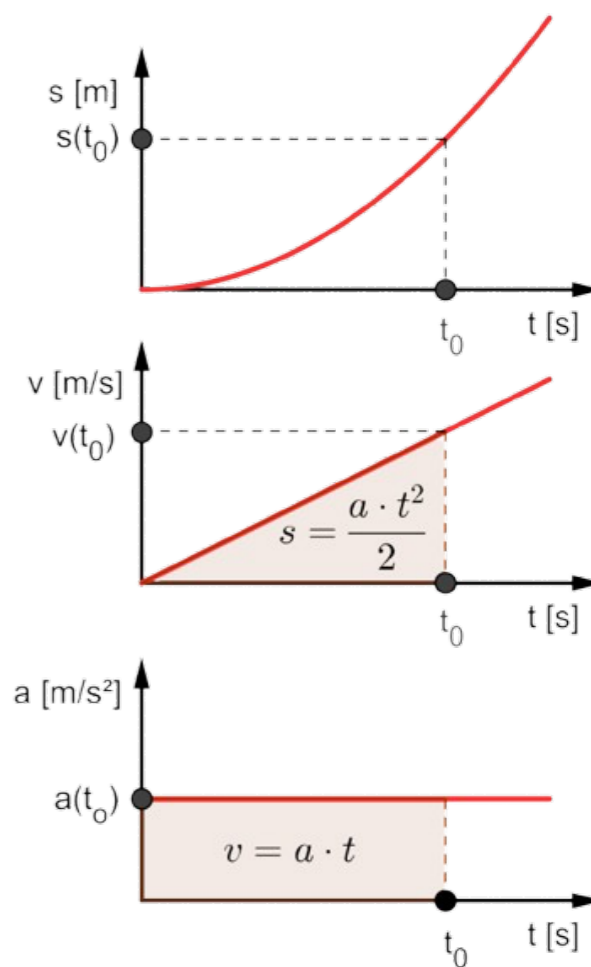
- Rozwiązanie:

✓ funkcja $\vec{r}(t)$, która określi jednoznacznie położenie punktu, pod warunkiem, że znane są warunki początkowe, czyli dla $t = 0$:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}(0) \text{ oraz } \vec{v}_0 = \vec{v}(0),$$

Jaka jest procedura znalezienia $\vec{r}(t)$?

- Czy można rozwiązać te równania dla wielu ciał? Np. kule bilardowe, molekuly gazu, itp.?



Mechanika Lagrange'a

- Układy N punktów opisać można $3N$ równaniami we współrzędnych np. kartezjańskich: $x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_N; t)$, gdzie określamy współrzędne uogólnione q_1, q_2, \dots, q_N , np.:

$$(x, y, z), (r, \theta, \phi), (r, \phi, z), (\theta, \phi)$$

- Współrzędne uogólnione:

- ✓ opisują konfigurację układu,
- ✓ są wybierane tak, aby liczba zmiennych opisujących układ była minimalna, np. wahadło – zamiast $(x, y) \rightarrow (\theta)$,
- ✓ np. dla jednego punktu w układzie sferycznym i cylindrycznym:

$$\begin{array}{ll} x_1 = r \sin\theta \cos\phi & x_1 = r \cos\phi \\ x_2 = r \sin\theta \sin\phi & x_2 = r \sin\phi \\ x_3 = r \cos\theta & x_3 = z \end{array}$$

gdzie zmienne $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\phi = \phi(t)$, $z = z(t)$ są funkcjami czasu, a jawna zależność od czasu nie występuje.

Mechanika Lagrange'a traktuje układ z punktu widzenia przepływu energii, nie rozpatruje sił (trudne pochodne wektorowe), nie potrzebuje równań brzegowych (więzów).

Funkcja Lagrange'a

- Funkcja Lagrange'a zdefiniowana jest jako różnica energii kinetycznej i potencjalnej (kiedy to możliwe?):

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, t)$$

- Równania pełniące rolę równań ruchu w mechanice Newtona, to równania Eulera-Lagrange'a (EL):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Przykłady (równania E-L we współrzędnych uogólnionych)- wyznaczyć równania ruchu :

- Ruch jednej cząstki w polu o energii potencjalnej $U(\vec{r})$, $q_i = \{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$
- Ruch wahadła matematycznego (energia kinetyczna i potencjalna jako funkcje $q_i \equiv \theta$)



Zasada Hamiltona

Zasada Hamiltona (zasada najmniejszego działania):

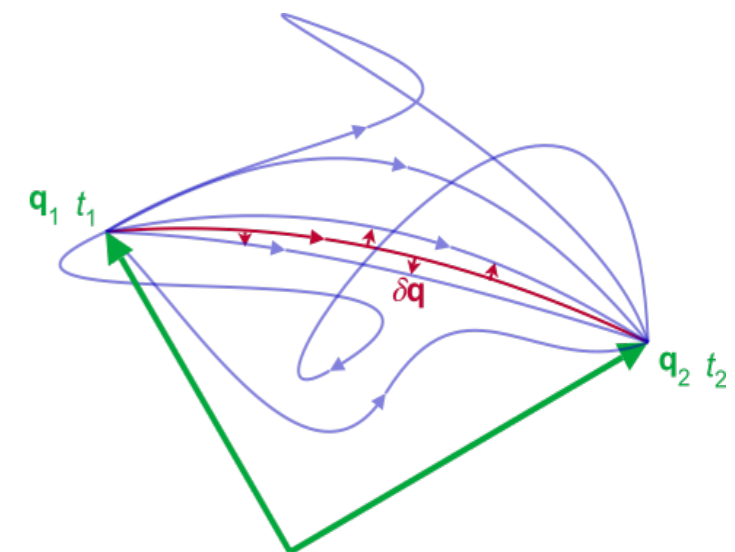
- opis układów dynamicznych z wykorzystaniem analizy wariacyjnej.
- zastosowanie w mechanice klasycznej i teorii pola.

Ruch układu fizycznego odbywa się w taki sposób, że całkowita wartość działania S , zdefiniowanego jako całka z funkcji Lagrange'a, przyjmuje wartość ekstremalną (najczęściej minimalną).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = 0$$

zasada najmniejszego działania

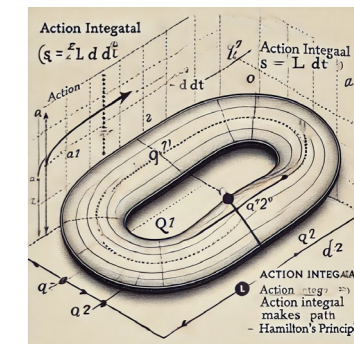


[wiki/Hamiltonprinciple](https://en.wikipedia.org/wiki/Hamilton%27s_principle)

W praktyce oznacza to, że rzeczywista trajektoria układu pomiędzy dwoma punktami czasowymi jest taka, że działanie przyjmuje ekstremalną (najczęściej minimalną wartość):

- ✓ spadek swobodny – linia prosta
- ✓ ruchy planet – orbity
- ✓ optyka – zasada Fermata

Funkcja Hamiltona



- Zasada Hamiltona (w większości zastosowań, które nas tu interesują) jest równoważna równaniom Eulera-Lagrange'a (N punktów materialnych, k więzów, $n = 3N - k$ stopni swobody, czyli n równań różniczkowych 2-go rzędu :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

- Jest jednak czasem wygodniejsza – zamiast n równań różniczkowych 2-go rzędu, mamy $2n$ równań 1-go rzędu.
- Wprowadzamy pędy uogólnione:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

- Definiujemy funkcję Hamiltona*:

$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

*jako transformatę Legendre'a funkcji Lagrange'a

Równania Hamiltona

- Równania Hamiltona jest to układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Równania te nazywane też są *równaniami kanonicznymi*, pęd nazywamy *kanonicznie sprzężonym*.
- Hamiltonian jest często (gdy współrzędne uogólnione nie zależą jawnie od czasu) sumą energii kinetycznej i potencjalnej: $H = T + V$.



Przykład:

Ruch punktu materialnego w polu sił potencjalnych, napisz Hamiltonian, działanie i wyprowadź równania ruchu

Mechanika falowa Schrödingera



Louis de Broglie

- Równania Hamiltona w mechanice kwantowej nazywają się równaniem Schrödingera.

$$H = T + V \qquad H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

- Idea – skoro mamy dualizm korpuskularno-falowy, de Broglie, 1924, Nobel 1929: $\omega = E/\hbar$ i $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$, $\lambda = \frac{h}{p}$, to jakim powinno wyglądać równanie falowe dla cząstek?

- Można zgadnąć rozwiązanie takiego równania: $\psi(\vec{r}, t) = A \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right\}$.

- ✓ jak zadziałamy operatorem różniczkowania po czasie: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t)$,

- ✓ a jak po zmiennej przestrzennej, np. x: $-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r}, t) = p_x \psi(\vec{r}, t)$,

- ✓ a jak zrobimy to jeszcze raz:

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(\mathbf{r}, t) = p_x \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(\mathbf{r}, t) = p_x^2 \psi(\mathbf{r}, t)$$

- Mamy $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$ i powinno być podobnie w mechanice falowej:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} \left\{ \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 \right\} \psi(\mathbf{r}, t)$$

równanie Schrödingera dla cząstki swobodnej

Równanie Schrödingera



Równaniem Schrödingera (1926, Nobel 1933), to równanie falowe dla cząstki o masie m , przy wprowadzeniu:

- operatorów energii i pędu (kwantowanie, pierwsze):

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

- A całkowita energia cząstki $E = T + V$ zapisana jest jako funkcja Hamiltona, Można dodać oddziaływanie:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \hat{V}(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \psi$$

hamiltonian \hat{H}

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t)$$

- Rozwiązanie R.S. $\psi(\vec{x}, t)$ zawiera pełną informację o stanie kwantowym.
- Nie ma klasycznej trajektorii cząstki, a pojawia się **funkcja falowa** $\psi(\vec{x}, t)$.
- Funkcja falowa nie ma interpretacji fizycznej, ale jej kwadrat modułu $|\Psi(\vec{x}, t)|^2$ określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu i czasie.
- Równanie ciągłości – zasada zachowania prawdopodobieństwa.

Równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = E \psi(\vec{r}, t) \quad -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r}, t) = p_x \psi(\vec{r}, t)$$

- Są to równania własne - działając **operatorem różniczkowym** na odpowiednie funkcje, zwaną **funkcją własną**, otrzymujemy liczbę, zwaną **wartością własną**:

Operator (funkcja własna) = wartość własna × (funkcja własna).

- Równanie operatorowe:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{x}, t) = \hat{H} \psi(\vec{x}, t) \quad \text{jest to równanie własne operatora energii (hamiltonianu)}$$

- Wymaga się, aby w mechanice kwantowej wielkości fizyczne były reprezentowane przez **liniowe operatory hermitowskie**. Dowodzi się, że wartości własne takich operatorów są rzeczywiste, można je więc interpretować jako wyniki pomiarów.

Postulaty, na których zbudowana jest mechanika kwantowa.

1. Wielkości fizyczne mierzone w eksperymencie są reprezentowane przez **liniowe operatory hermitowskie***,
2. Wynikami pomiarów są jedynie **wartości własne** tych operatorów.

*jest to operator, który jest równy swojemu sprzężeniu hermitowskiemu:

$$H = H^\dagger, \text{ czyli } H_{ij} = H_{ji}^*$$

Równanie Schrödingera – równanie ciągłości

gęstości prawdopodobieństwa:

$$\rho(x, t) \equiv \psi \psi^* = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

prąd prawdopodobieństwa:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

- Równanie ciągłości – zasada zachowania prawdopodobieństwa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

- Zmiana gęstości prawdopodobieństwa jest możliwa, gdy mamy „wyływ” prawdopodobieństwa
- Te same rachunki wykonamy dla równania Kleina-Gordona i Diraca.
- Co się stanie z funkcją falową $\psi(\vec{x}, t)$ gdy przemnożymy ją przez fazę $e^{iq\alpha}$?

Równanie Schrödingera – równanie ciągłości



$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi.$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V\psi^*.$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez ψ^* , a drugie przez ψ , i odejmijmy:

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*).$$

Lewą stronę można zapisać jako $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2)$, a prawą jako $-\nabla \cdot \mathbf{j}$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Funkcja Lagrange'a - pola

- W QFT zamiast cząstek mamy pola, których wzbudzenia interpretujemy jako cząstki.
- Pola są ciągłymi funkcjami współrzędnych czasoprzestrzennych x^μ .
- W QFT wprowadza się **gęstość lagranżjanu**- to funkcja pól i pochodnych pól:

$$L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}(\phi_i(x^\mu), \partial_\mu \phi_i)$$

- Gęstość lagranżjanu jest zdefiniowana dla punktu w czasoprzestrzeni.
- Jeśli L (lagranżjan) określimy jako energię, skalar opisujący cały układ, to gęstość lagranżjanu \mathcal{L} określa energią na jednostkę objętości

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

Niezbędnik relatywistyczny:

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, x, y, z)$$

$$x_\mu = (x^0, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

Pola - wymagania

- Pole $\phi(x^\mu)$ w każdym punkcie czasoprzestrzeni powinno się transformować wzg. transformacji Lorentza (TL) jak: skalar lub wektor lub tensor.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

ten sam punkt czasoprzestrzeni, a $\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$ powinny opisywać to samo zdarzenie

uwaga: współrzędne „'” odnoszą się zawsze do układu po przekształceniu. np. TL lub symetrii gauge

- Rozważmy teraz małą zmianę pola $\phi(x^\mu)$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

powinna być niezmiennicza wzgl. TL (Lorentz Invariant – LI)



Gęstość lagranżjanu

- W QFT „wystarczy” podać odpowiedni lagranżjan i mamy dobrą teorię dla zadanych pól.
- Podobnie, jak w mechanice klasycznej, zasada minimalnego działania prowadzi do równań typu Eulera – Lagrange’a, czyli równań pola

$$\partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

Pole skalarne – \mathcal{L}

Przykład: swobodna (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagrangianu \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Jakie równanie dostaniemy z równań Eulera – Lagrange’a?

Niezbędnik:

Jak rozumieć zapis $(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$?

Stosowana jest tzw. konwencja sumowania po powtarzających się wskaźnikach, czyli *:

$$(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \equiv (\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - (\partial_1 \phi)(\partial_1 \phi) - (\partial_2 \phi)(\partial_2 \phi) - (\partial_3 \phi)(\partial_3 \phi)$$

* powtórka z relatywistyki w zapisie kowariantnym

Pole skalarne – \mathcal{L}

Przykład: swobodna (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest jako pole skalarne ϕ i gęstość lagrangianu \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Jakie równanie dostaniemy z równań Eulera – Lagrange’a?

.....(dokończyć)...

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$$

Równanie Kleina-Gordona:

- dla $m = 0$ staje się równaniem falowym i opisuje pole elektromagnetyczne
- dla $m \neq 0$ opisuje swobodną cząstkę o spinie 0, człon masowy oznacza np. pole Higgsa



Równanie Kleina-Gordona

Równanie Schrödingera (Nobel 1933r), :

- opisuje cząstki nierelatywistyczne,
- nie jest LI, ponieważ pochodne czasowe są I rzędu, przestrzenne II rzędu (czas i przestrzeń nie są traktowane tak samo).

Zacznijmy zatem od niezmiennika: $E^2 - p^2 = m^2$

lub jego postaci kowariantnej $p^\mu p_\mu - m^2 = 0$ (jednostki naturalne $c = 1$)

- Dla operatorów pędu i energii mamy:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi + \nabla^2 \Psi = m^2 \Psi \quad (-\partial^\mu \partial_\mu - m^2) \psi = 0$$

Równanie Kleina-Gordona:

- rozwiązanie w postaci fali laskiej: $\Psi(\vec{x}, t) \propto e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$
- opisuje cząstki relatywistyczne,
- ma rozwiązania o ujemnej energii
- prowadzi do ujemnej gęstości prawdopodobieństwa (wyprowadzić)

Oskar Klein



Walter Gordon

Pole wektorowe – pole elektromagnetyczne

- 4-Potencjał wektorowy:

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

- Tensor elektromagnetyczny:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Elementy tensora elektromagnetycznego (zad):

$$F^{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Pole wektorowe – \mathcal{L}

- Pole swobodnej cząstki wektorowej (o spinie 1, np. fotonu) opisane jest przez czterowektor A^μ i gęstość lagrangianu:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu$$

- Wykorzystując tensor elektromagnetyczny $F^{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ zapisujemy:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu$$

- A równania pola wyglądają tak:

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

- Jak mamy do czynienia np. z fotonem ($m = 0$), to powinny z tego wyjść równania Maxwella...

