

# Wstęp do Modelu Standardowego

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej  
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Równanie Diraca.  
Antycząstki i antymateria  
Oddziaływanie elektronu z polem elektromagnetycznym  
Diagramy Feynmana

## Oddziaływania elektromagnetyczne -plan

$$A_\mu = \left( \frac{1}{c} \phi, -\vec{A} \right)$$

$$\partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

- Jak teraz powiązać diagram Feynmana z relatywistycznymi równaniami Maxwella?
- Pamiętajmy, że w MS mamy pola, a cząstki mają być wzbudzeniem tego pola.
- Oddz. elektromagnetyczne są tu wzorcem – bardzo dobrze znamy pole, mamy precyzyjne wyniki doświadczalne, a QED jest najlepszą teorią.
- Oddziaływanie pomiędzy fotonem i naładowaną cząstką uzyskamy poprzez wprowadzenie podstawień:
  - operatory:  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
  - przemnożenia stanu cząstki przez fazę (lokalna transformacja cechowania:  $\psi' = e^{iq\alpha(x)}\psi$ )
  - transformację cechowania (gauge) pola:  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$
  - podmianę zwykłej pochodnej na pochodną kowariantną:  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu$

## Oddziaływania elektromagnetyczne -plan

$$A_\mu = \left( \frac{1}{c} \phi, -\vec{A} \right)$$

$$\partial_\mu = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

- Jak teraz powiązać diagram Feynmana z relatywistycznymi równaniami Maxwella?
- Pamiętamy, że w MS mamy pola, a cząstki mają być wzbudzeniem tego pola.
- Oddz. elektromagnetyczne są tu wzorcem – bardzo dobrze znamy pole, mamy precyzyjne wyniki doświadczalne, a QED jest najlepszą teorią.
- Oddziaływanie pomiędzy fotonem i naładowaną cząstką uzyskamy poprzez wprowadzenie podstawień:
  - operatory:  $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$
  - przemnożenia stanu cząstki przez fazę (lokalna transformacja cechowania:  $\psi' = e^{iq\alpha(x)}\psi$ )
  - transformację cechowania (gauge) pola:  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$
  - podmianę zwykłej pochodnej na pochodną kowariantną:  $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu - iqA_\mu$
- Stan elektronu opisywany jest równaniem Diraca – let's play!



## Równania w MS - wymagania

- R. Schrödingera:

- ✓ kwantowe:  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ,
- ✓ nierelatywistyczne.

- R. Kleina-Gordona:

- ✓ kwantowe:  $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla, E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ ,
- ✓ relatywistyczne:  $p^\mu p_\mu - m^2 c^2 / \hbar^2 = 0$
- ✓ problem z ujemnymi energiami i gęstością pr-twa:  
 $E = \pm\sqrt{p^2 - m^2}$ .

- Poszukiwane nowe równanie:

- ✓ kwantowe,
- ✓ relatywistyczne,
- ✓ opisujące możliwe stany elektronu (spin  $s=1/2$  z dwoma orientacjami),
- ✓ z dobrą interpretacją ujemnych energii,
- ✓ z rozwiązaniem w postaci fali płaskiej:  $\Psi(\vec{x}, t) \propto e^{-i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$

## Równanie Diraca I

- Dirac (1927) – prosty „pierwiastek” z równania K-G (NU):

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi + \nabla^2 \psi = m^2 \psi$$

czyli Równanie Diraca (RD) w postaci kowariantnej:

- Pozostaje jedynie znaleźć postać macierzy  $\gamma^\mu$ :

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

mnożymy RD przez jego sprzężenie:

i znajdujemy warunki na  $\gamma^\mu$  o rozmiarze 4x4:  $\psi^\dagger \left( -i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m \right) \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\vec{\gamma} \cdot \nabla - m \right) \psi = 0$

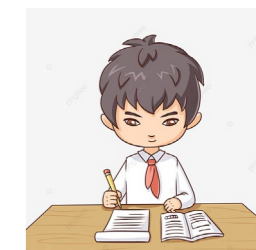
$(\gamma^0)^2 = 1$ , macierz  $\gamma^0$  jest hermitowska

$(\gamma^i)^2 = -1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , antyhermitowskie

$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0$  for  $\mu \neq \nu$ ,

co daje antykomutatory:  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

- Macierze  $\gamma$  nie są 4-wektorami, to są macierze ze stałymi współczynnikami, są LI.
- R. Diraca też jest niezmiennicze względem TL.



## Równanie Diraca I (cd)

- Jedną z dostępnych wówczas reprezentacją macierzy  $\gamma^\mu$  okazała się kombinacja macierzy spinowych Pauliego  $\sigma_i$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma^1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sigma^i$ : macierze Pauliego (reprezentacje operatora spinu dla  $s=1/2$ )

- A pełna wersja RD  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$  wygląda następująco

$$\begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 & i\frac{\partial}{\partial z} & i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & i\frac{\partial}{\partial t} - m & i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial z} \\ -i\frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & -i\frac{\partial}{\partial t} - m & 0 \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -i\frac{\partial}{\partial t} - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bi-spinor

**OMG**  
CHECK IT OUT

jaka jest interpretacja bispinora?



## Równanie Diraca II

- Innym podejściem do znalezienia postaci dobrego równania dla fermionów w MS jest wymaganie, aby hamiltonian zawierał jedynie pochodne I-rzędu, a następnie znalezienie odpowiednich współczynników (macierzy)  $\alpha$  oraz  $\beta$ , przez które należy przemnożyć operatory energii i pędu.

$$\hat{H}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

- Cząstka powinna spełniać  $E^2 = p^2 + m^2$ , podniesienie powyższego „do kwadratu” daje warunki:

- Związek pomiędzy macierzami  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma^0 &\equiv \beta \\ \gamma^1 &\equiv \beta \alpha_x \\ \gamma^2 &\equiv \beta \alpha_y \\ \gamma^3 &\equiv \beta \alpha_z \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_i^2 &= \beta^2 = 1 \\ \alpha_j \beta + \beta \alpha_j &= 0 \\ \alpha_j \alpha_k + \alpha_k \alpha_j &= 0 \end{aligned} \right.$$

## Równanie Diraca I – rozwiązanie dla cząstki swobodnej

$$p^\mu = (E, \vec{p})$$

$$p_\mu = (E, -\vec{p})$$

$$x^\mu = (t, \vec{x})$$

$$-ix_\mu p^\mu = -i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})$$

- Rozwiązanie RD to również powinna być fala płaska.
- Załóżmy, że jest ono w postaci:  $\psi(x^\mu) = u(p^\mu)e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$ , gdzie  $u(p^\mu)$  nazywamy spinorem.
- Wstawmy  $\psi(x^\mu)$  do RD  $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{p}) = 0$ .
- Zaczniemy od **cząstki spoczywającej**  $\vec{p} = \mathbf{0}$ . Pochodne przestrzenne = 0 i mamy:

$$\left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m\right)\psi = 0$$

$$(\gamma^0 E - m)\psi = 0$$

- Wygląda to jak problem własny operatora energii:  $\hat{E}u = \begin{pmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & -m\mathbf{I} \end{pmatrix}u$
- Co rozwiążemy jako:  $\psi = u(E, 0)e^{-iEt}$   
 $u(E, 0)$  - eigenspinory

spin up  $\uparrow$  spin down  $\downarrow$

$$u_1(m, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2(m, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3(m, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4(m, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$E = m$   $E = -m$

Te cztery stany są również wartościami własnymi operatora  $S_z$ , więc reprezentują fermiony spinowe w górę i w dół (dlaczego? - później).

## Równanie Diraca I – rozwiązanie dla cząstki swobodnej

- Rozwiązanie RD to również powinna być fala płaska.
- Załóżmy, że jest ono w postaci:  $\psi(x^\mu) = u(p^\mu)e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$ , gdzie  $u(p^\mu)$  nazywamy spinorem.
- Wstawmy  $\psi(x^\mu)$  do RD  $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{p}) = 0$ .
- Zaczniemy od **cząstki spoczywającej**  $\vec{p} = \mathbf{0}$ .

Pochodne przestrzenne = 0 i mamy:

$$\begin{aligned} \left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - m \right) \psi &= 0 \\ (\gamma^0 E - m) \psi &= 0 \end{aligned}$$

gdzie  $\psi = u(E, 0)e^{-iEt}$  oraz:  $E\gamma^0 u = mu$   $u(E, 0)$  - eigenspinory

- Wygląda to jak problem własny operatora energii:  $\hat{E}u = \begin{pmatrix} m\mathbf{I} & 0 \\ 0 & -m\mathbf{I} \end{pmatrix} u$

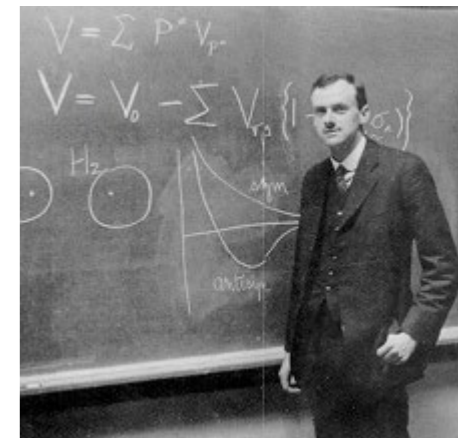
czyli rozwijając:

$$E \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}$$

spodziewamy się 4 ortogonalnych rozwiązań, np. jako:  $\psi = N u(E, 0)e^{-iEt}$

$$\begin{aligned} p^\mu &= (E, \vec{p}) \\ p_\mu &= (E, -\vec{p}) \\ x^\mu &= (t, \vec{x}) \\ -ix_\mu p^\mu &= -i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

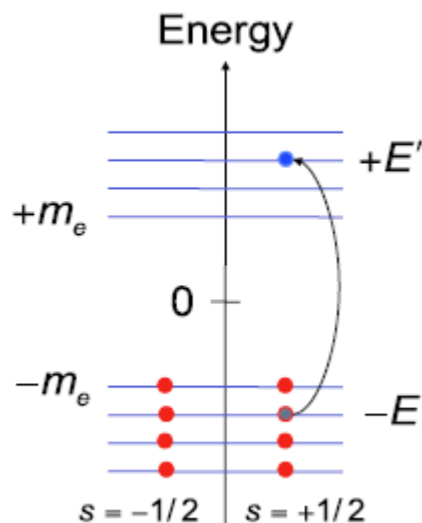
# Równanie Diraca – interpretacja Diraca rozwiązań



- Cztery rozwiązania równania Diraca dla cząstki w **spoczynku**:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-imt} \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{+imt} \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{+imt}$$

opisują dwa różne stany fermionu ( $\uparrow\downarrow$ ) z  $E = m$  i  $E = -m$



Interpretacja Diraca dla  $E = -m$  :

- Próżnia (w pełni wypełniona) reprezentuje "morze" cząstek o ujemnej energii.
- Według Diraca: dziury w tym "morzu" reprezentują antycząstki.
- Jeśli do próżni dostarczona jest energia  $2E$ :
  - ✓ powstaje jeden elektron (ładunek ujemny, energia dodatnia) i jedna dziura (ładunek dodatni, energia ujemna).
- Ten obraz nie jest wyjaśnieniem antybozonów, nie był zrozumiały i nie przyjęty się!

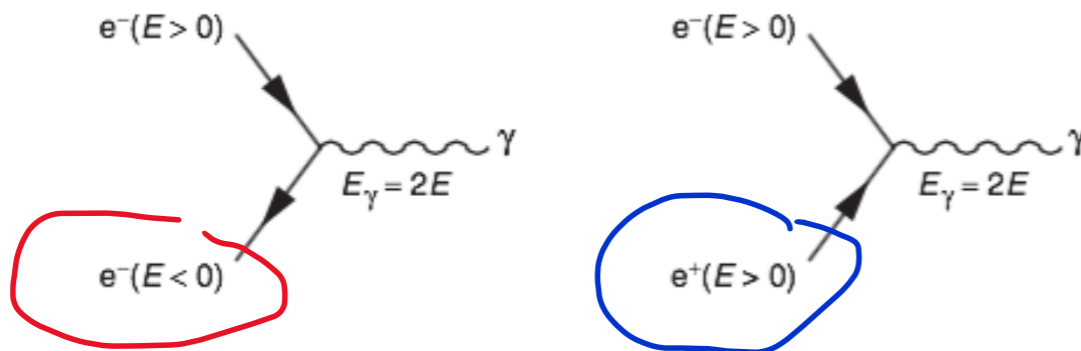
# Równanie Diraca – interpretacja Stuckenberga i Feynmana

**Stückelberg (1941)-Feynman (1948)** - wyjaśnienie antycząstek\*:

- Rozważmy rozwiązanie energii ujemnej jako cząstkę **biegnącą wstecz w czasie** i przemianować ją na **antycząstkę**, z **energiami dodatnią**, poruszając się **do przodu w czasie**:

$$e^{-i[(-E)(-t)]} = e^{-i[Et]}$$

- Emisja antycząstki o  $E > 0$  = absorpcja cząstki o  $E < 0$



**\*Feynman–Stueckelberg interpretation** [Wikipedia]

By considering the propagation of the negative energy modes of the electron field backward in time, [Ernst Stueckelberg](#) reached a pictorial understanding of the fact that the particle and antiparticle have equal mass  $m$  and spin  $J$  but opposite charges  $q$ . This allowed him to rewrite [perturbation theory](#) precisely in the form of diagrams. [Richard Feynman](#) later gave an independent systematic derivation of these diagrams from a particle formalism, and they are now called [Feynman diagrams](#). Each line of a diagram represents a particle propagating either backward or forward in time. This technique is the most widespread method of computing amplitudes in quantum field theory today.

Since this picture was first developed by Stueckelberg,<sup>[5]</sup> and acquired its modern form in Feynman's work,<sup>[6]</sup> it is called the **Feynman–Stueckelberg interpretation** of antiparticles to honor both scientists.

## Równanie Diraca – rozwiązanie ogólne

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\psi(x^\mu) = u(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{p}) = 0$$

- Dla poruszającej się cząstki,  $\vec{p} \neq \mathbf{0}$ , równanie Diraca  $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$ ,

z wykorzystaniem spinorów z  $\psi(t, \vec{x}) = u(E, \vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$  zapiszemy jako:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{p}) = 0, \text{ czyli: } (E\gamma^0 - p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3 - m)u = 0$$

za pomocą reprezentacji Pauliego:  $\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$  i  $\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$

co daje: 
$$\left[ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \right] u = 0$$

gdzie: 
$$\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \equiv \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \sigma_z p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

## Równanie Diraca – rozwiązanie ogólne

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\psi(x^\mu) = u(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{p}) = 0$$

- Zapiszmy 4- spinor  $u$  jako dwa 2-wyrazowe wektory:  $\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ , gdzie:  $u_A = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ ,  $u_B = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ ,  $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$   
4-składnikowy bi-spinor jako wektor dwuskładnikowy

R.D.  $(\gamma^\mu p_\mu - m)u(E, \vec{p}) = 0$  ma teraz postać:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \begin{pmatrix} u_A & u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E - m)I & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -(E + m)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Wydaje się, że równania dla wektorów  $u_A$  i  $u_B$  są sprzężone:

$$u_A = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{(E - m)} u_B \quad \text{oraz} \quad u_B = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})}{(E + m)} u_A$$

- Przyjmując dwa najprostsze rozwiązania dla  $u_A$  i  $u_B$  jako wektory ortogonalne:  $u_{A,B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  i  $u_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

otrzymujemy cztery ortogonalne rozwiązania równania Diraca dla cząstek swobodnych:

$$\psi_i = u_i(E, \vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

gdzie:

## Równanie Diraca - rozwiązanie

... gdzie:

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

elektron z energią  $E = +\sqrt{m^2 + p^2}$

$$\psi = u_{1,2}(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$u_3 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pozytron z energią  $E = -\sqrt{m^2 + p^2}$

$$\psi = u_{3,4}(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

z macierzy Pauliego  $\sigma$

$$E^2 - p^2 = m^2$$

$$p^\mu = (E, \vec{p})$$

- Teraz możemy przyjąć interpretację antycząstek F-S jako cząstki o dodatniej energii (propagujących się wstecz w czasie) i zmienić rozwiązania energii ujemnej  $u_{3,4}$ , aby reprezentować dodatnie spinory antycząstek (pozyton)  $v_{1,2}$ :

$$u_4(-E, -\vec{p}) e^{-i(-Et - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})} = u_4(-E, -\vec{p}) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \equiv v_1(E, \vec{p}) e^{-i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$u_3(-E, -\vec{p}) e^{-i(-Et - (-\vec{p}) \cdot \vec{x})} = u_3(-E, -\vec{p}) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \equiv v_2(E, \vec{p}) e^{-i(-Et + \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

odwracając znaki  
 $E$  i  $p$

$$E = +\sqrt{m^2 + p^2}$$

Spinory  $u$  i  $v$  są rozwiązaniami:  $(i\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$  i  $(i\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0$

# Równanie Diraca - rozwiązanie

... gdzie:

$$u_1 = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

elektron z energią  $E = +\sqrt{m^2 + p^2}$

$$\psi = u_{1,2}(p^\mu) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$u_3 = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = N \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pozytron z energią  $E = -\sqrt{m^2 + p^2}$

$$\psi = u_{3,4}(p^\mu) e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}$$

$$\text{Try: } E^2 - p^2 = m^2$$

$$p^\mu = (E, \vec{p})$$

Normalizacja  $\psi$ ?

$$N = \sqrt{E + m}$$

Spinory  $u$  i  $v$  są rozwiązaniami:

$$(i\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0 \quad \text{i} \quad (i\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0$$

# Równanie Diraca - rozwiązanie

Dla swobodnej **cząstki** - rozwiązanie RD:

$$\psi = u(E, \vec{p}) e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \text{ spełnia } (i\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0$$

ze spinorem:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

Dla swobodnej **antycząstki** - rozwiązanie RD

$$\psi = u(E, \vec{p}) e^{i(Et + \vec{p} \cdot \vec{x})} \text{ spełnia } (i\gamma^\mu p_\mu + m)u = 0$$

ze spinorem:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Zarówno cząstki, jak i antycząstki mają rozwiązania z dodatnią energią:  $E = +\sqrt{m^2 + p^2}$ .
- Cząstki i antycząstki mają przeciwny spin:  $\hat{S}^v = -\hat{S}$

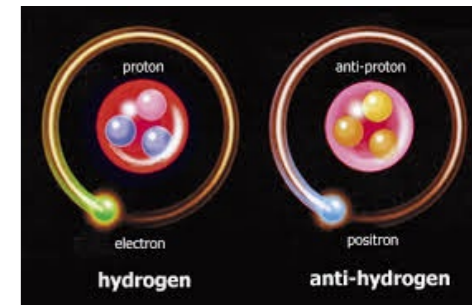
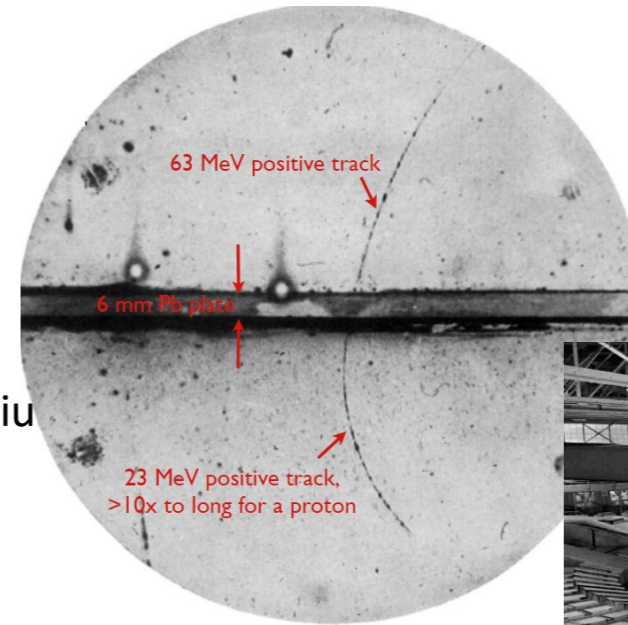
but now:



The main problem is:  
we have no antiparticles....

# Antycząstki

- **Pozyton** został odkryty w 1933 roku przez Andersona przy użyciu komory mgłowej Wilsona.
- **Antiproton** in 1955 w Bevatron (a 6.5 GeV synchrotron w Berkeley)
- **Antyneutron** – 1956.
- **Anty-wodór:**  
Wyprodukowany w 1995 w Low Energy Antiproton Ring (LEAR) w CERN
- Poszukiwania antyjąderek w przestrzeni:
  - ✓ Spektrometr magnetyczny alfa (AMS-01)
  - ✓ Poszukiwania antyhelu w promieniach kosmicznych – dużo He znalazł, ale nie anty-He!
  - ✓ AMS-02 – wykryto ekstremalny strumień pozytonów – zgodny z anihilacją  $e+e-$ , ale z pewnym wzrostem wysokich energii o nieznanym pochodzeniu.



Paul Dirac – jeden z najmłodszych Noblistów (31 lat)



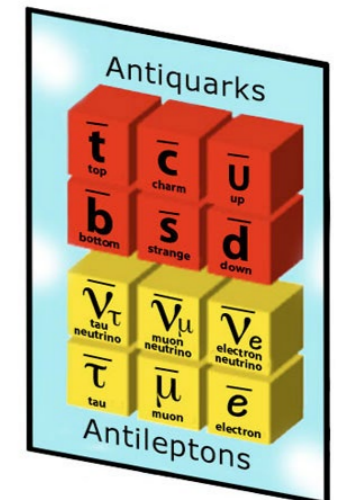
"For the discovery of new productive forms of atomic theory."

## Dirac's prescience



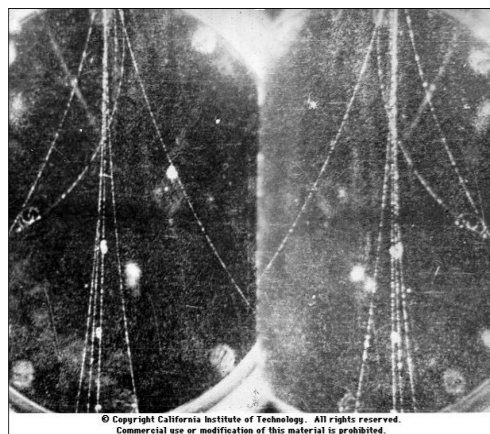
Concluding words of 1933 Nobel lecture

"If we accept the view of **complete symmetry between positive and negative electric charge** so far as concerns the fundamental laws of Nature, we must regard it rather as an accident that the Earth (and presumably the whole solar system), contains a **preponderance of negative electrons and positive protons**. It is quite possible that for some of the stars it is the other way about, these stars being built up mainly of positrons and negative protons. In fact, there may be half the stars of each kind. **The two kinds of stars would both show exactly the same spectra**, and there would be no way of distinguishing them by present astronomical methods."



# Antymateria – historia produkcji na Ziemi

1932 pozyton



1959 antyproton



1965 antydeuteron



1995 antywodór



2011 antywodór

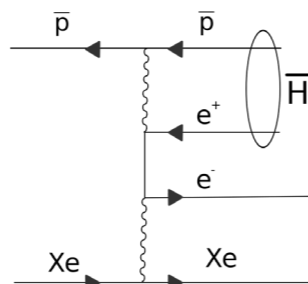


Bevatron

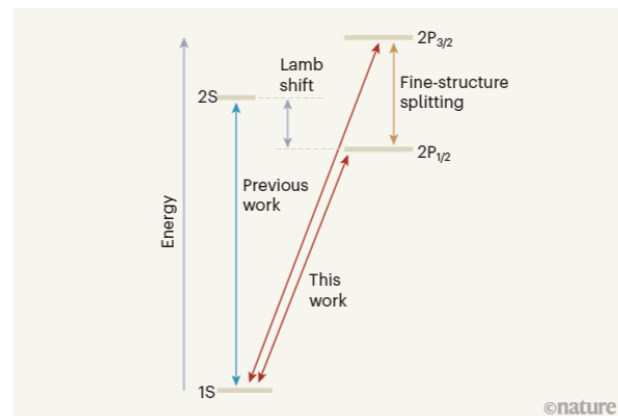
PS CERN / AGS Brookhaven

CERN LEAR

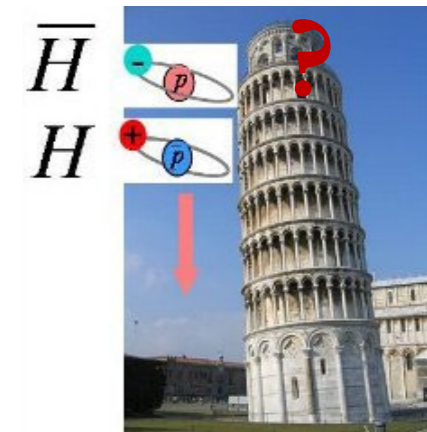
(38+309)



2021 spektroskopia antywodoru



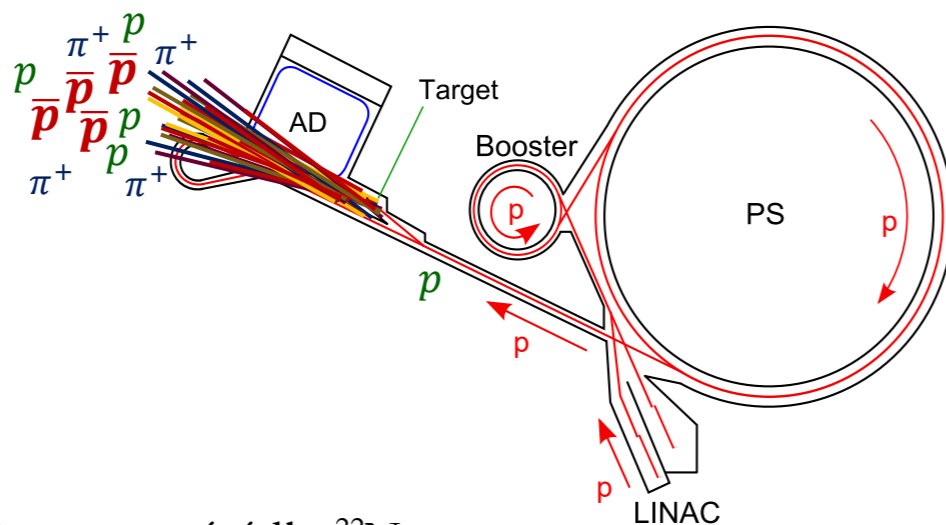
antygravitacja 2025



# Antiproton Decelerator (CERN od 1997)



- AD - wiązka protonów (PS, Proton Synchrotron) jest kierowana na metalową tarczę.

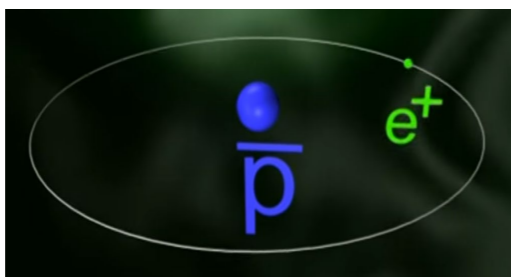


- Pozytony – źródło  $^{22}\text{Na}$
- Typowo w jednym pomiarze  $90e3 \bar{p} + 3e6 e^+ = 50e3 \bar{H}$ , z czego **20** uwięzionych

- spektroskopia antywodoru – jak wodoru
- antygravitacja?



$$h = \frac{\bar{g}}{2} \left( \frac{L}{v_h} \right)^2$$



# Oddziaływania elektromagnetyczne w MS - plan

Grupy - następne zajęcia

Local  $U(1)$  invariance

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$$

pochodna kowariantna -  
następne zajęcia

Równania Maxwella

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Pola

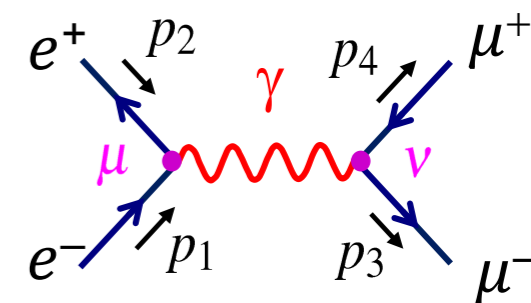
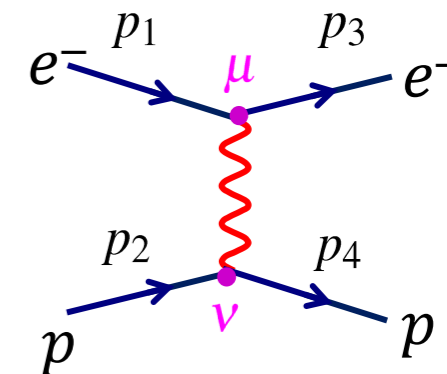
Równanie Diraca

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = +q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

Fermiony

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi$$

Oddziaływanie pól  
fermionowych



$$M = [u_e^\dagger(p_3)q_e\gamma^0\gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g^{\mu\nu}}{q^2} [u_\tau^\dagger(p_4)q_\tau\gamma^0\gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$

## Wracamy do pola elektromagnetycznego

- Postulujemy lagranżjan pola elektromagnetycznego

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - J_{\mu} A^{\mu}$$

- Umiemy napisać równania Maxwella w postaci kowariantnej (czyli relatywistycznej).
- Do potencjału można dodać 4-gradient dowolnej funkcji skalarnej, nie zmieniając przy tym pól  $\vec{E}$  i  $\vec{B}$  (transformacja cechowania – gauge):  $A^{\mu}(x') \rightarrow A^{\mu} + \partial^{\mu} \chi(x)$ .
- Definiujemy pochodną kowariantną:

$$\mathcal{D}_{\mu} \psi \rightarrow \partial_{\mu} + iqA_{\mu} \psi$$

- Nowy lagranżjan pola fermionowego Diraca:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu} \mathcal{D}_{\mu} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Zapewnienie niezmienniczości lagranżjanu względem transformacji  
cechowania  $A^{\mu}(x') \rightarrow A^{\mu} + \partial^{\mu} \lambda(x)$

wprowadza oddziaływanie elektronu z fotonem.



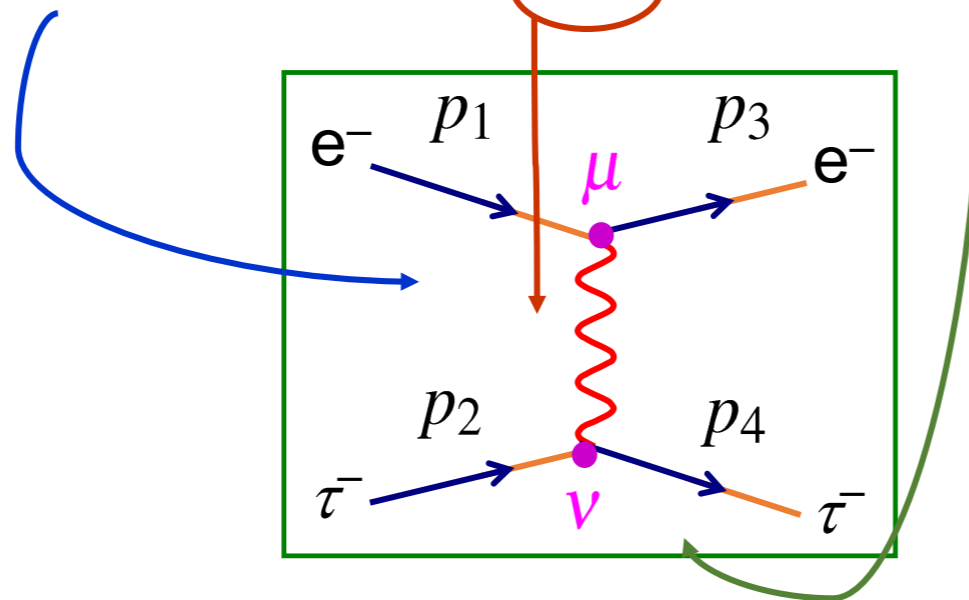
## Oddziaływanie elektronu z fotonem



- Element macierzowy oddziaływania dwóch fermionów poprzez wymianę fotonu (wirtualnego)::

$$M = \langle \psi_c | V | \psi_a \rangle \frac{1}{q^2 - m_x^2} \langle \psi_d | V | \psi_b \rangle$$

$$M = [u_e^\dagger(p_3) q_e \gamma^0 \gamma^\mu u_e(p_1)] \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} [u_\tau^\dagger(p_4) q_\tau \gamma^0 \gamma^\nu u_\tau(p_2)]$$



$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$



## Oddziaływanie elektronu z fotonem

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} = \gamma^0 \hat{H} \psi = m\psi - i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \psi + q\gamma^\mu A_\mu \psi$$

$$\times \gamma^0: \quad \hat{H} \psi = \underbrace{(\gamma^0 m - i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla})}_{\text{en. kinetyczna}} \psi + \underbrace{q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu}_{\text{en. potencjalna}} \psi$$

en. kinetyczna

en. potencjalna

- En. potencjalna cząstki o spinie  $\frac{1}{2}$  w polu elektromagnetycznym:

$$\hat{V}_D = q\gamma^0 \gamma^\mu A_\mu$$

$$q\gamma^0 \gamma^0 A_0 = q\phi$$

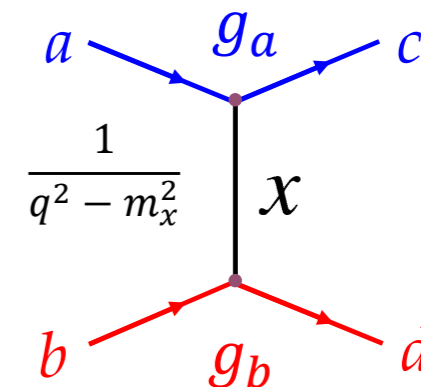
foton:

$$A_\mu = \epsilon_\mu^{(\lambda)} e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)}$$

- Element macierzowy (p. diagram Feynmana) jest wyrażany przez:

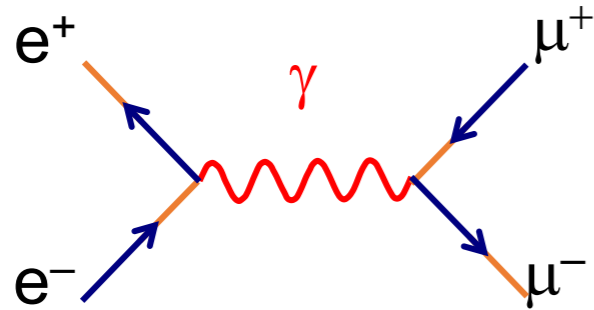
$$M = \underbrace{\langle \psi_c | V | \psi_a \rangle}_{g_a} \frac{1}{q^2 - m_x^2} \underbrace{\langle \psi_d | V | \psi_b \rangle}_{g_b}$$






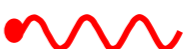
↓  
propagator  
(cząstka pośrednicząca)



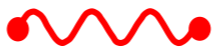

# Reguły diagramów Feynmana

- Linie zewnętrzne – cząstki rzeczywiste:



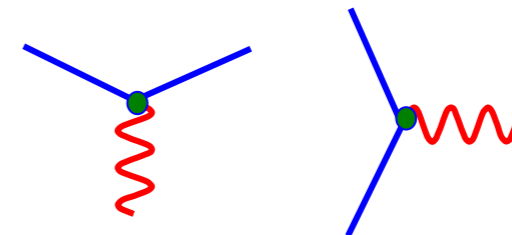
spin 1/2	}	cząstka wchodząca	$u(p)$	
		cząstka wychodząca	$\bar{u}(p)$	
		antycząstka wchodząca	$\bar{v}(p)$	
		antycząstka wychodząca	$v(p)$	
spin 1	}	foton wchodzący	$\epsilon^\mu(p)$	
		foton wychodzący	$\epsilon^\mu(p)^*$	

- Linie wewnętrzne (propagatory – wirtualne cząstki pośredniczące)

spin 1	foton	$-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}$	
spin 1/2	fermion	$\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}$	

- Wierzchołki (siła oddziaływania, coupling)

fermion spin  $\frac{1}{2}$ ,  $q = -e$       $ie\gamma^\mu$

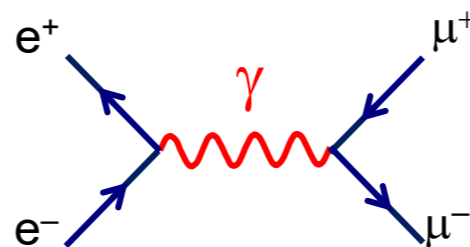


## W podsumowaniu\*

\*Część obliczeń i rysunków zaczerpnięta została z wykładów Marka Thomsona

1. Cząstki obdarzone ładunkiem elektrycznym oddziałują elektromagnetycznie, potencjał jest świetnie wyliczalny z elektrostatyki.
2. Znamy bardzo dobrze lagranżjan pola elektromagnetycznego  $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - J_{\mu}A^{\mu}$
3. Umiemy napisać równania Maxwella w postaci kowariantnej (czyli relatywistycznej).
4. Zapewnienie niezmienniczości lagranżjanu względem transformacji cechowania  $A^{\mu}(x') \rightarrow A^{\mu} + \partial^{\mu}\lambda(x)$  wprowadziło oddziaływanie elektronu z fotonem.
5. Złota Reguła Fermiego pozwala na powiązanie fizyki oddziaływania (amplituda z obserwowanym procesem (przekrój czynny).
6. Diagramy Feynmana pozwalają w elegancki sposób powiązać amplitudę procesu i funkcje opisujące cząstki biorące udział w procesie

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \frac{\rho_f}{J}$$



$$M = -q_e q_{\tau} \frac{j_e \cdot j_{\tau}}{q^2}$$