Wstęp do Modelu Standardowego – zadania 3

1. Ile jest i jakie są możliwe ładunki mezonów złożonych z pary $q\bar{q}$ i barionów złożonych z trzech kwarków, jeśli dysponujemy kwarkami u, d, s?

2. (*Dyskusja*) W przyrodzie możemy spotkać dwa rodzaje momentu pędu: jeden związany z ruchem jednego ciała z układu względem drugiego (orbitalny moment pędu L), drugi – z własnym obrotem ciała (spin S).

   W mechanice klasycznej można zmierzyć jednocześnie wszystkie współrzędne momentu pędu.

   W mechanice kwantowej można zmierzyć kwadrat długości momentu pędu i jedną współrzędną, przyjmuje się, że 3-cią współrzędną. Wynikiem są skwanowane wartości: $l(l+1)\hbar^2$ (dla operatora $\hat{L}^2$ i $m_l\hbar$ (gdzie $m_l = -l, -l+1 \dots -1, 0, 1, \dots, l-1, l$) dla operatora $\hat{L}_z$.

   Podobnie dla spinu – mierzymy S^2 i S_z, a wynikiem są odpowiednio: $s(s+1)\hbar^2$ i $m_s\hbar$ (gdzie $m_l = -s, -s+1 \dots -1, 0, 1, \dots, s-1, s$), a $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \dots$) .

   Leptony, czy układ dwóch lub trzech kwarków mają określone spiny, ale moment pędu może przyjąć dowolną (byle skwantowaną) wartość.

3. Stan spinowy cząstki można zapisać używając braketów: $|s\, m_s\rangle$, np. stan spinowy elektronu lub kwarka o spinie 1/2 z trzecią składową 1/2, czyli stan ↑, zapisujemy jako: $\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$. A zatem układ ↑↑ dwóch kwarków o spinach 1/2, z trzecią składową 1/2 zapiszemy jako:

$$\left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle = |1\,1\rangle$$

   Proszę znaleźć i zapisać pozostałe stany spinowe dwóch kwarków.

4. Proszę określić, jaki może być całkowity moment pędu mezonów i barionów, które złożone są odpowiednio z dwóch i trzech kwarków.

   Całkowity moment pędu cząstki jest to wektorowa suma jej spinu i momentu pędu: $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, ale jak dodajemy te wektory? W mechanice kwantowej nie znamy przecież wszystkich współrzędnych?

   Używając braketów, zapytamy: jakie są możliwe momenty pędu $|jm\rangle$ układu złożonego ze stanów $|j_1\, m_1\rangle$ oraz $|j_2\, m_2\rangle$? Trzecie składowe dodają się łatwo: $m = m_1 + m_2$, ale co z długością całkowitego momentu pędu $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$?

   Jak $\vec{J}_1$ i $\vec{J}_2$ są równoległe, ich długości się dodadzą, gdy antyrównolegle – odejmą. Czyli długość $\vec{J}$ może on przyjąć każdą całkowitą wartość j z przedziału: $j = |j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, 0, |j_1 + j_2| - 1, |j_1 + j_2|$.

   Odpowiedź na pytanie z początku zadania jest intuicyjna, gdy kwarki mają zerowy orbitalny moment pędu L. W przypadku ogólnym konieczna jest znajomość znajdywania tych stanów przy pomocy tablic ze współczynnikami Clebsha-Gorgana*.

5. Kwarki u i d mają izospin $I = \frac{1}{2}$ oraz trzecią składową izospinu $I_3 = +\frac{1}{2}$ (kwarki u i $\bar{d}$) lub $I_3 = -\frac{1}{2}$ (kwarki d i $\bar{u}$). Jaki całkowity izospin mogą mieć mezony złożone z kwarków u i d? Odpowiednie współczynniki można otrzymać z tablic współczynników Clebsha-Gordana, analogicznie jak dla spinów. Proszę napisać postacie funkcji falowych tych mezonów i przypisać im fizyczne cząstki z multipletu o 0^-. Pamiętać należy tu o pewnej konwencji*, która powoduje, że funkcja falowa jednego z tych kwarków ma znak przeciwny do funkcji antykwarka.
   ** zmiana $q \to \bar{q}$ jest równoważna działaniu operatora parzystości ładunkowej $\hat{C}$: $\hat{C}|u\rangle = e^{i\Phi}|\bar{u}\rangle$. Konwencja Condona-Shortleya oznacza, że przemiany lekkich kwarków mają znaki odpowiednio: $|u\rangle \to -|\bar{u}\rangle$, $|d\rangle \to +|\bar{d}\rangle$.*

6. Rozpatrujemy silne oddziaływania w rozpraszaniu pionów na protonach: $\pi + N \to \pi + N$.
   a) Proszę wypisać możliwe stany izospinowe w tych procesach. Matematyka izospinu jest taka sama, jak spinu, tzn, wiedząc, że piony mają izospin $I = 0$ i trzy możliwe wartości $I_3 = -1, 0, +1$, a nukleony $I = \frac{1}{2}$ i $I_3 = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$, używając współczynników Clebsha-Gordana dodajemy izospiny analogicznie jak spiny.