Wstęp do Modelu Standardowego – zadania 1

1. Proszę zrobić transformację Lorentza czterowektora X do układu poruszającego się z prędkością $\vec{V} = (V, 0,0)$ i policzyć iloczyn skalarny dwóch czterowektorów X i Y w obu układach. W ten sposób pokazać, że iloczyn skalarny jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
2. Policzyć $\det(\Lambda^T \Lambda)$, gdzie Λ to macierz transformacji Lorentza.
3. Tensor pola elektromagnetycznego zdefiniowany jest jako: $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Proszę napisać macierz z elementami tego tensora.
4. Proszę „wyprowadzić" równanie Kleina-Gordona, podstawiając operatory pędu i energii do niezmiennika relatywistycznego. Jakiej postaci mogą być rozwiązania równania Kleina-Gordona?
5. Wychodząc z równania Proca, pokazać, że $\partial_\mu A^\mu = 0$ oraz, że każdy składnik A^μ spełnia równanie Kleina-Gordona $\Box A^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\mu = 0$
6. Proszę zapisać równanie Kleina-Gordona we współrzędnych sferycznych, a następnie pokazać, ze funkcja (tzw. potencjał Yukawy) $\Psi(r) = \frac{g_0}{4\pi r} e^{-r/R}$, gdzie $g_0, R = \frac{1}{m}$ to stałe jest jego rozwiązaniem. Jak zinterpretować $\Psi(r)$ dla $m = 0$?
7. Jakie warunki powinny spełniać macierze γ w równaniu Diraca $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$, aby było ono zgodne z równaniem Kleina-Gordona $\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi + \nabla^2\right) = m^2\psi$?
8. Sprawdzić, czy podstawienie $\Psi \to e^{i\theta}\Psi$ (globalna zmiana fazy) zmienia lagranżian Diraca.
9. Pokazać jak lokalna symetria cechowania $\Psi \to e^{i\theta(x)}\Psi$ lagranżianu wprowadza oddziaływania elektronu z fotonem.