AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

Model Standardowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Grupy i symetrie w fizyce
(zwłaszcza cząstek
elementarnych)

Symetrie oddziaływań

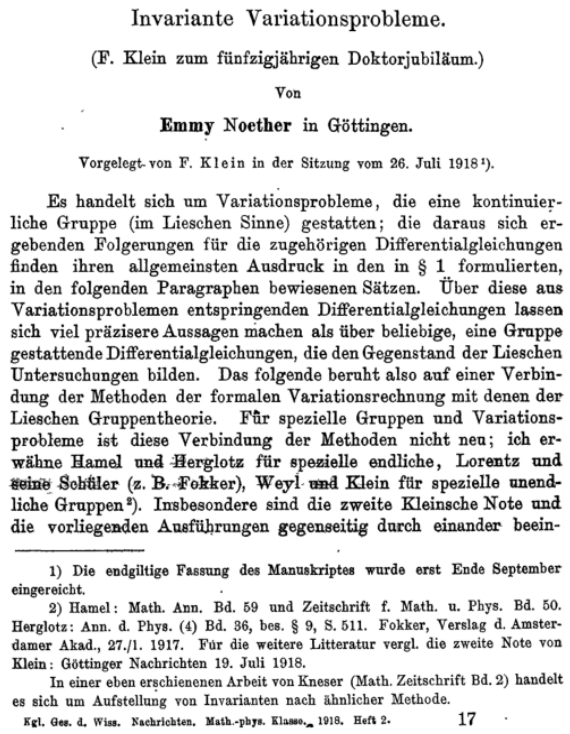
- Wszystkie współczesne próby odnalezienia praw natury posługują się pojęciem symetrii.
- Symetria jest opisana matematycznie przez grupy, które często mają o „zakodowanych” nazwach.

Model Standardowy ma symetrię grupy: $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$

- Każda ciągła symetria praw fizyki, czyli taka, która nie zmienia:
  - ✓ równań ruchu,
  - ✓ działania

  jest związana z zachowaną wartością: pęd, energia, moment pędu, ładunek.
- Praw zachowania jest tyle, ile niezależnych parametrów (lub generatorów) grupy.
- Symetrie dyskretne niekoniecznie generują prawa zachowania:
  - ✓ inwersja współrzędnych (parzystość przestrzenna) – tak
  - ✓ inwersja w czasie - nie

1918 - Prawo Emmy Noether (1882-1935)



Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse. 1918. Heft 2. 17

Grupa U(1) × SU(2) × SU(3)

- Grupa U(1) to grupa symetrii oddziaływań elektromagnetycznych.

  „1” oznacza „singlety” czyli np. elektron (fermion):

  zachowana wielkość – ładunek elektryczny

1 fermion: (elektron)
1 boson: (foton)

- Grupa SU(2) to grupa symetrii oddziaływań słabych.

  „2” oznacza „pary” , fermiony są w parach; „S” specjalna:

  zachowana wielkość – słaby izospin

2 fermiony: $\binom{elektron}{neutrino}$

3 bozony: (Z^0, W^+, W^-)

- Grupa SU(3) to grupa symetrii oddziaływań silnych, związanych z kolorem.

  „3” oznacza „tryplety” , fermiony są w trójkach:

  zachowana wielkość - kolor

3 fermiony: $\begin{pmatrix} kwark\ red \\ kwark\ blue \\ kwark\ green \end{pmatrix}$

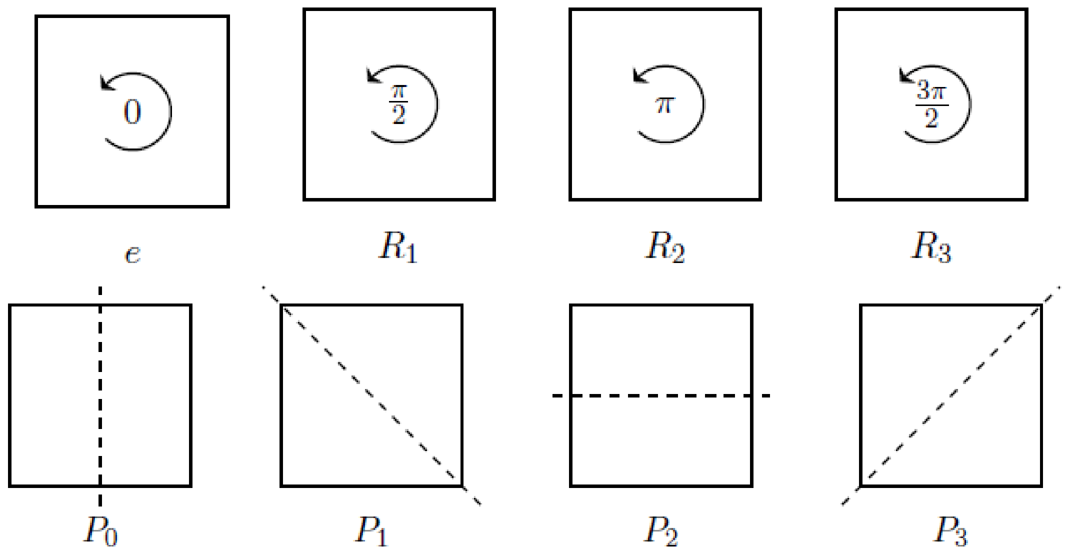
8 bozonów: (kolorowe gluony)

Z symetrii cechowania (gauge) wynika zachowany ładunek: elektryczny, izospin, kolorowy

Wybrane aspekty teorii grup – symetria dyskretna

Rozważmy symetrie kwadratu:

- obrót o $\pi/2$ wzg. środka pozostawia kwadrat w stanie niezmienionym:
  - ✓ Istnieją trzy nietrywialne obroty i jeden neutralny.
- Kwadrat również nie zmieni się, przy odbiciach (transformacji parzystości przestrzennej).



Kwadrat ma 8 transformacji, które twoarzą grupę dihedralną (wielokąty): $D_4 = \{e, R_1, R_2, R_3, P_0, P_2, P_3\}$

Każde dwie transformacje tworzą nowy element grupy,

⇒ tablice mnożenia (czyli dodawania kolejnych obrotów) $R_{\pi/2}R_\pi = R_{3\pi/2}$

(elementy komutują?):

	g_1	g_2	$\cdots$
g_1	g_1g_1	g_2g_1	$\cdots$
g_2	g_1g_2	g_2g_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\Longrightarrow$

	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
e	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
R_1	R_1	R_2	R_3	e	P_3	P_0	P_1	P_2
R_2	R_2	R_3	e	R_1	P_2	P_3	P_0	P_1
R_3	R_3	e	R_1	R_2	P_1	P_2	P_3	P_0
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	e	R_1	R_2	R_3
P_1	P_1	P_2	P_3	P_0	R_3	e	R_1	R_2
P_2	P_2	P_3	P_0	P_1	R_2	R_3	e	R_1
P_3	P_3	P_0	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3	e

Reprezentacje

- Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b).

- Zatem najprostsza **reprezentacja** to macierze 2×2, np:

sprawdzam!

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Punkt $\vec{x} = (a, b)$ transformuje się jak: $\vec{x}' = R_i \cdot \vec{x}$

- Reprezentacja grupy jest to sposób, w który można zapisać abstrakcyjną grupę w postaci macierzy, operatora lub funkcji, które działają w przestrzeni wektorowej.
- Reprezentacja grupy to przypisanie każdemu elementowi grupy macierzy, operatora, etc., tak, aby działanie grupy odpowiadało mnożeniu macierzy.

Reprezentacje

Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

- Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b).
- Podgrupy obrotów: $\mathbb{Z}_4 = \{e, R_1, R_2, R_3\}$ lub $\mathbb{Z}_2 = \{e, R_2\}$ możemy reprezentować liczbami zespolonymi:

$$e = 1, \qquad R_1 = e^{i\pi/2}, \qquad R_2 = e^{i\pi}, \qquad R_3 = e^{i3\pi/2}$$

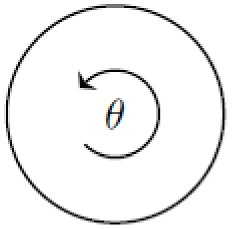
- A reprezentację (zespoloną) możemy zapisać jako:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

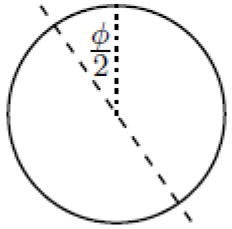
Ideą tych zabiegów jest pomysł, że „zapominamy” o rzeczywistym kwadracie, a zostawiamy jedynie reprezentacje i ogólne własności grupy

Wybrane aspekty teorii grup – symetria ciągła

Grupa dihedralna D_n przy $n \to \infty$ daje symetrię okręgu – 2-wymiarową (2d na płaszczyźnie) ortogonalną grupę O(2).



$R(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)$



$P(\phi) \mid \phi \in [0, 2\pi)$

- Tablice mnożenia:

	$R(\theta_2)$	$P(\phi_2)$
$R(\theta_1)$	$R(\theta_1+\theta_2)$	$P(\phi_2-\theta_1)$
$P(\phi_1)$	$P(\phi_1+\theta_2)$	$R(\phi_1-\phi_2)$

- Elementy reprezentacji nie komutują: $R(\theta)P(\phi) \neq P(\phi)R(\theta)$.

- Grupa ortogonalna O(2) może być reprezentowana przez macierze 2x2 działające na dowolny punkt okręgu (a, b):

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad P(\phi) = \begin{pmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

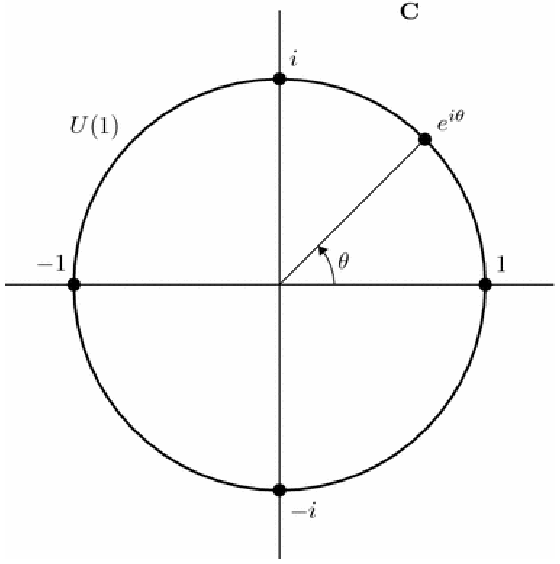
- Obie macierze spełniają warunek $MM^T = 1$, a ile wynosi $\det M$?

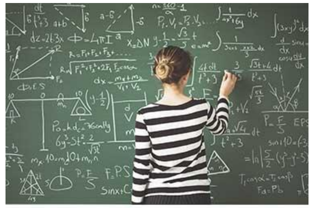
Element grupy

- Element grupy to pojedynczy obiekt należący do grupy.
  - ✓ Elementem grupy D_4 są obroty R_i i odbicia P_i (8 elementów).

Grupa U(1):

- Elementem grupy U(1) jest np. liczba zespolona: $z = e^{i\theta}$, $\theta \in R$.
- Grupa U(1) to grupa jednostkowych macierzy 1x1, zbiór liczb zespolonych o module =1 (obroty?)
- Grupa U(1) jest abelowa $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- Grupa U(1) ma jeden parametr.
- Grupa U(1) opisuje symetrię cechowania pola elektromagnetycznego z zasadą zachowania ładunku





$$e^{i\theta} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

U(1) ⟷ SO(2)

agh.edu.pl

Reprezentacja grupy U(1)

- Grupa U(1) związana jest z obrotem (w przestrzeni zespolonej, dyskusja).
- Reprezentacja grupy U(1): $D(\theta) = e^{i\theta}$.
- Pole ψ jest przemnożone przez: $\psi \to e^{i\theta}\,\psi$

- Grupa U(1) opisuje lokalną symetrię cechowania pola elektromagnetycznego z zasadą zachowania ładunku.
- Pole spinorowe $\psi(x)$ – symetrii cechowania: $\boxed{\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\,\psi(x)}$
- „Zwykła” pochodna $\partial_\mu\psi$ jest zastąpiona* pochodną kowariantną $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

$$* \, \partial_\mu(e^{i\alpha(x)}\psi) = e^{i\alpha(x)}\,(\partial_\mu\psi + i(\partial_\mu\alpha)\psi)$$

- Pole A_μ transformuje się jak: $A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$ i wtedy pochodna pola transformuje się jak pole

$$\boxed{\mathcal{D}_\mu\psi \to e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu\psi}$$

Symetria cechowania w elm

- Lagranżjan pola elektromagnetycznego (elektron + foton):

$$\boxed{\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}$$

pozostaje niezmienniczy przy: $\mathcal{D}_\mu\psi \to e^{i\alpha(x)}\mathcal{D}_\mu\psi \qquad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\,\psi(x)$$

- Lokalna symetria U(1) prowadzi do zachowania prądu $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.
- Równanie ciągłości: $\partial_\mu \mathrm{j}^\mu = 0$.
- A zatem całkowity ładunek jest zachowany: $Q = \int d^x x j^0(x)$

Lokalna symetria cechowania U(1) wprowadza pole, oddziaływanie elektronu z polem A_μ oraz zapewnia zachowanie ładunku elektrycznego

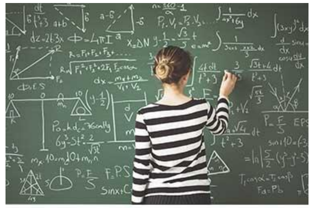
Formalna definicja grupy

Group: A *group* G is a set of elements with a product rule, such that

1. G is *closed* under group multiplication, i.e. $g_1 g_2 \in G$ for all elements $g_1, g_2 \in G$ — combining two symmetry operations is also a symmetry.
2. The group product is *associative*, i.e. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ for all elements $g_1, g_2, g_3 \in G$ — symmetry operations are associative.
3. There exists a unique identity element $e \in G$ such that $eg = ge = g$ for any element $g \in G$ — there exists a trivial symmetry operation where nothing is done.
4. For every element $g \in G$, there exists a unique inverse $g^{-1} \in G$ such that $g^{-1} g = g g^{-1} = e$ — symmetry operations can be inverted to return to the original state.

If $g_1 g_2 = g_2 g_1$ for all $g_1, g_2 \in G$, the group G is called an *Abelian group* with a commutative product. If $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$ for some $g_1, g_2 \in G$, the group G is called a *non-Abelian group* with a non-commutative product.

Czy grupy omówione za poprzednich slajdach są grupami?
A które grupami abelowymi?



Reprezentacja grupy - formalnie

Macierz N-wymiarowa $D(G)$ jest reprezentacją grupy G, gdy mapuje elementy G na zbiór $N \times N$ macierzy $G \to GL(N)$, takie, że:

- $D(e) = 1$;
- $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$, dla każdego $g_1, g_2 \in G$;
- Reprezentacja $D(G)$ jest unitarna, gdy $D(g)$ jest macierzą unitarną dla każdego $g \in G$;
- Grupy mogą mieć wiele reprezentacji.

W QFT interesują nas jedynie reprezentacje unitarne:

- Gdy teoria przewiduje grupę symetrii G, fizyczne stany powinny się transformować jak unitarne reprezentacje grupy:

$$|\psi\rangle \to D(G)|\psi\rangle$$

- Co prowadzi do wniosków:
  - ✓ iloczyn $\langle\psi|\psi\rangle$ pozostanie niezmienniczy względem tej symetrii,
  - ✓ operatory hermitowskie, które transformują się unitarną reprezentacją grupy pozostają hermitowskie po transformacji: $O \to D(G)OD(G)^{-1}$

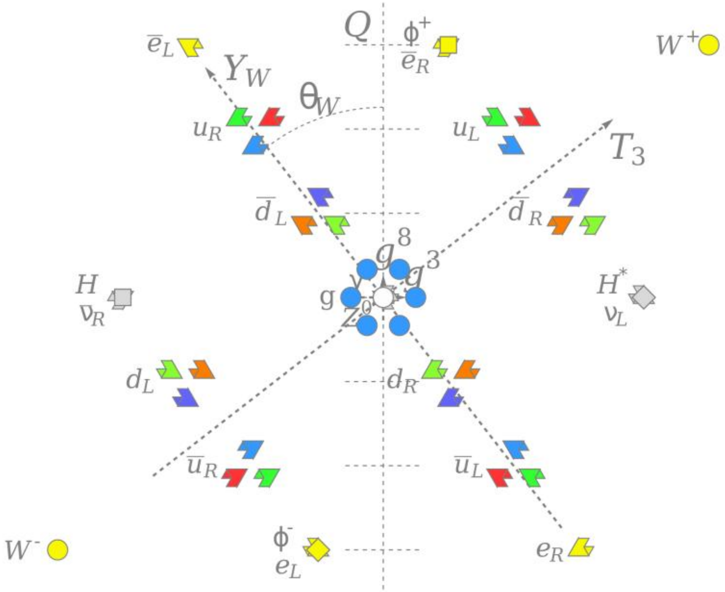
Grupy Lie

- W HEP ciekawe są grupy ciągłe ze specjalną algebrą – algebrą Lie:

Lie algebra: A *Lie algebra* $\mathfrak{g}$ is a vector-space over some field F (real $\mathbb{R}$ or complex numbers $\mathbb{C}$ with a bilinear Lie bracket operation $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfying

1. *Alternativity*: $[X, X] = 0$ for all $X \in \mathfrak{g}$.
2. *Anti-commutativity*: $[X, Y] = -[Y, X]$ for all $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. *Bilinearity*: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ for all $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ and $a, b \in F$.
4. *Jacobi identity*: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

- 1930 E.Wigner wskazuje związek cząstek elementarnych ze strukturą grupy Lie i algebra Lie.
- Elementy ciągłej grupy Lie powstają poprzez pewną operację na sobie.
- Cząstki (stany kwantowe) pochodzą z nieredukowalnych reprezentacji grupy Lie, a ich własności (masy, spektra) związane są z grupami Lie i symetriami natury.



https://en.wikipedia.org/wiki

Generatory grupy Lie

- Grupa Lie jest rozmaitością różniczkową – jeśli można określić infinitezymalne małe przekształcenie, to umiemy zbudować z niego wszystkie elementy grupy. Np z obrotu o 1° zrobimy: R(45°) = R(1°)^{45}
- Grupy Lie zapisuje się przy użyciu specjalnych funkcji zwanych generatorami:

$$\boxed{A = e^{i g_A v^A}}$$

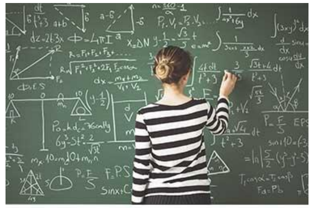
g_A - generatory grupy,
v^A - wektor parametrów

? przestrzenie dualne $g_A v^A$?

$g_A v^A$ to kombinacja przekształceń, np.: dla SO(3) $g_A v^A = g_{xy}(\alpha) + g_{xz}(\beta) + g_{yz}(\gamma)$ to obroty o α, β, γ względem płaszczyzn xy, xz, yz

- Obroty w 3D to elementy grupy SO(3), a jak znaleźć generatory tej grupy?

$$R_{yz}(\theta) = e^{i g_{yz}\theta} = I + i g_{yz}\theta + \frac{1}{2!}\left(i g_{yz}\theta\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(i g_{yz}\theta\right)^3 + \cdots$$



$$R_{yz}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \cdots$$

Grupa U(1)

- Grupa U(1) to najprostsza grupa Lie'go, składa się z unitarnych macierzy 1x1, czyli jednej liczby (zespolonej).
  - ✓ U(1) jest grupą abelową.
  - ✓ Dowolny element grupy U(1) moze być zapisany jako:

$$\alpha = \exp(\theta)\,, \qquad \theta \in [0,2\pi)$$

  - ✓ Reprezentacja U(1) parametryzowana jest jedną liczbą q:

$$D_q\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta}, e^{i\theta} \in U(1)$$

- Działanie grupy U(1) to $D_q(\theta) = q\theta$ dla każdego elementu (kąta) $\theta \in U(1)$.
- Dla generatora grupy U(1): $D_q(T_0) = q\hbar$ (wkrótce okaże się, że q to ładunek).
- Zespolone pole ϕ transformuje się w reprezentacji D_q grupy U(1), gdy dla $e^{i\theta} \in U(1)$ mamy:

$$\phi \;\rightarrow\; \phi' = e^{i\theta}\,\phi$$

Grupy specjalne SU(N)

- Grupy SU(N) reprezentują wewnętrzną symetrię Modelu Standardowego.
- Są to grupy unitarnych macierzy U o wymiarze $N \times N$, czyli $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ oraz $\det U = 1$, czyli:

$$U_i^k U_k^j = U_k^j U_i^k = \delta_{ij}, \qquad i, j, k = 1.., N$$

U_j^i - elementy macierzy U, a $U_i^j \left(U_j^i\right)^* =$ - macierzy $\left(U^\dagger\right)^T$,

- SU(N) tworzą grupę Lie'go z $N^2 = 1$ parametrami, z taką samą liczbą generatorów postaci T_a, $a = 1,2,.., N^2 - 1$.
- Model Standardowy ma symetrię $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ z 8+3+1 transformacjami.

Grupa SU(2)

- Grupa unitarnych macierzy 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem.
- Generatory – macierze Pauliego $g_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ (grupa Lie), σ_i-macierze Pauliego, spełniają $U^\dagger U = 1$ oraz $\det U = 1$,:

$$g_{yz} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x \qquad g_{zx} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y \qquad g_{xy} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z$$

- Generatory należą do SU(3) i działają na (zespolony) 2-elementowy obiekt (spinor), ale reprezentują obrót stanu spinowego w 3 wymiarach:
- Mając $A = e^{i g_A v^A}$ wyrazimy np. obrót $R_{yz}(\theta) = e^{i g_{yz}\theta} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$
- Użyteczna jest baza złożona z kombinacji $T_i = g_i$:

$$T_\pm = T_1 \pm T_2; \qquad \mathrm{T}_3$$

- Z relacjami komutacyjnymi:

$$[T_+, T_-] = 2\hbar\, T_3; \qquad [T_3, T_\pm] = \pm\hbar\, T_\pm$$

Grupa SU(3)

- Grupa unitarnych macierzy 3×3 z jednostkowym wyznacznikiem.
- Generatory – macierze Gell-Manna (pomnożone przez $\hbar/2$) (grupa Lie).

$$T_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_5 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_6 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_7 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_8 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$