



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

Model Standardowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Grupy i symetrie w fizyce
(zwłaszcza cząstek
elementarnych)

Symetrie oddziaływań

- Wszystkie współczesne próby odnalezienia praw natury posługują się pojęciem symetrii.
- Symetria jest opisana matematycznie przez grupy, które często mają o „zakodowanych” nazwach.

Model Standardowy ma symetrię grupy: $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$

- Grupa to matematyczne narzędzie, którego celem jest opisanie symetrii układu.
- Każda ciągła symetria praw fizyki, czyli taka, która nie zmienia:
 - ✓ równań ruchu,
 - ✓ działania
 jest związana z zachowaną wartością: pęd, energia, moment pędu, ładunek.
- Praw zachowania jest tyle, ile niezależnych parametrów (lub generatorów) grupy.
- Symetrie dyskretne niekoniecznie generują prawa zachowania:
 - ✓ inwersja współrzędnych (parzystość przestrzenna) – tak
 - ✓ inwersja w czasie - nie

1918 - Prawo Emmy Noether (1882-1935)

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

Emmy Noether in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918¹⁾.

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen²⁾. Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27/1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

Egl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math.-phys. Klasse, 1918. Heft 2. 17



Grupa $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$

- Grupa $U(1)$ to grupa symetrii oddziaływań elektromagnetycznych.
„1” oznacza „singlety” czyli np. elektron (fermion),
„U” – unitarna,
zachowana wielkość – ładunek elektryczny, powiedzmy, że jest naładowany fermion reprezentując tę grupę.
- Grupa $SU(2)$ to grupa symetrii oddziaływań słabych.
„2” oznacza „pary”, fermiony są w parach; „S” specjalna,
zachowana wielkość – słaby izospin, a reprezentantami grupy jest para oddziałujących słabo fermionów – elektron i jego neutrino
- Grupa $SU(3)$ to grupa symetrii oddziaływań silnych, związanych z kolorem.
„3” oznacza „tryplety”, fermiony są w trójkach,
zachowana wielkość – kolor, reprezentacja grupy to trójka kolorowo naładowanych fermionów, czyli kwark.

1 fermion: (elektron)
1 boson: (foton)

2 fermiony: $\begin{pmatrix} \textit{elektron} \\ \textit{neutrino} \end{pmatrix}$
3 bozony: (Z^0, W^+, W^-)

3 fermiony: $\begin{pmatrix} \textit{kwark red} \\ \textit{kwark blue} \\ \textit{kwark green} \end{pmatrix}$
8 bozonów: (kolorowe gluony)

Chociaż każdy fermion jest elementem jednej lub wszystkich trzech grup – traktujemy je osobno, ale finalnie łączymy w jedną teorię wyjaśniającą wszystkie efekty – Model Standardowy

Z symetrii cechowania (gauge) wynika zachowany ładunek: elektryczny, izospin, kolorowy

Wybrane aspekty teorii grup – symetria dyskretna

Rozważmy symetrie kwadratu:

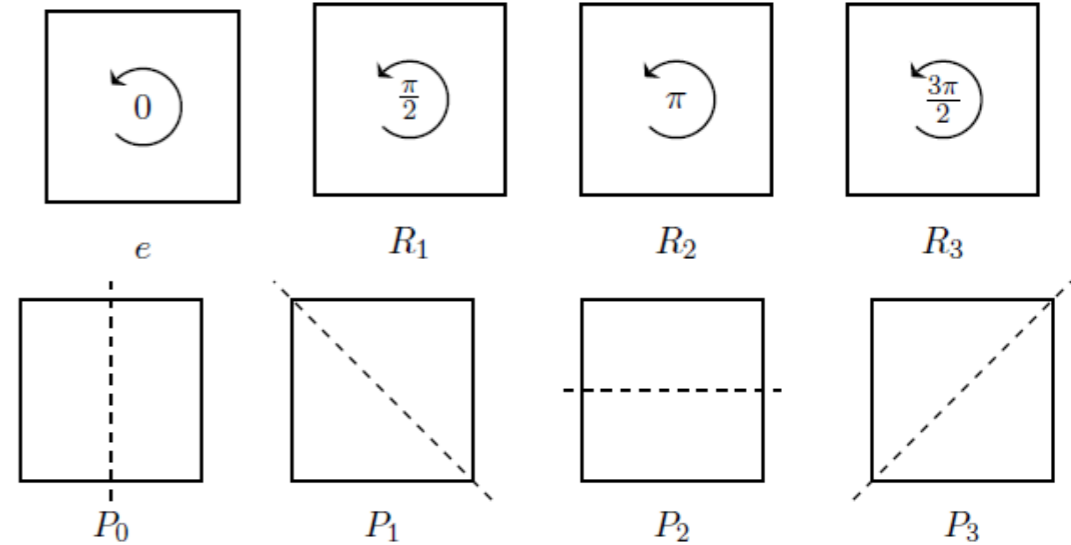
- obrót o $\pi/2$ wzg. środka pozostawia kwadrat w stanie niezmiennym:
 - ✓ Istnieją trzy nietrywialne obroty i jeden neutralny.
- Kwadrat również nie zmieni się, przy odbiciach (transformacji parzystości przestrzennej).

Kwadrat ma 8 transformacji, które tworzą grupę dihedralną (wielokąty): $D_4 = \{e, R_1, R_2, R_3, P_0, P_2, P_3\}$

Każde dwie transformacje tworzą nowy element grupy,

⇒ tablice mnożenia (czyli dodawania kolejnych obrotów) $R_{\pi/2}R_{\pi} = R_{3\pi/2}$

(elementy komutują?):



	g_1	g_2	...
g_1	g_1g_1	g_2g_1	...
g_2	g_1g_2	g_2g_2	...
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

⇒

	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
e	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
R_1	R_1	R_2	R_3	e	P_3	P_0	P_1	P_2
R_2	R_2	R_3	e	R_1	P_2	P_3	P_0	P_1
R_3	R_3	e	R_1	R_2	P_1	P_2	P_3	P_0
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	e	R_1	R_2	R_3
P_1	P_1	P_2	P_3	P_0	R_3	e	R_1	R_2
P_2	P_2	P_3	P_0	P_1	R_2	R_3	e	R_1
P_3	P_3	P_0	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3	e

Co potrzeba, aby była grupa?

- Celem wprowadzenia grup w fizyce jest opis symetrii.
- Jakie obiekty mogłyby być użyteczne:
 - obiekt, na którym wykonuje się przekształcenie
 - przekształcenie
- Element grupy to pojedyncza transformacja.
 - ✓ Elementem grupy D_4 są obroty R_i i odbicia P_i (8 elementów).
 - ✓ Elementem grupy jest przesunięcie układu w przestrzeni lub czasie
 - ✓ Elementem grupy jest transformacja Lorentza.
- Reprezentacja grupy to matematyczny zapis (np. w postaci macierzy) elementów grupy.
- Użyteczność grup fizyce wymaga, aby spełniały one pewne matematyczne wymagania...
- Grupy powinny mieć dobrze określoną algebrę.

Reprezentacje

- Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

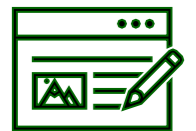
Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b) .

- Zatem najprostsza **reprezentacja** to macierze 2×2 , np:

$$\begin{aligned}
 e &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & R_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & R_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 P_0 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & P_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & P_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & P_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- Punkt $\vec{x} = (a, b)$ transformuje się jak: $\vec{x}' = R_i \cdot \vec{x}$
- **Reprezentacja** grupy jest to sposób, w który można zapisać abstrakcyjną grupę w postaci **macierzy**, operatora lub funkcji.
- Reprezentacja grupy to przypisanie każdemu elementowi grupy macierzy, operatora, etc., tak, aby działanie grupy odpowiadało mnożeniu macierzy.

sprawdzam!



Reprezentacje

Jak można inaczej zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

- Macierz obrotu wektora na płaszczyźnie „klasycznie”: $R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$
- Punkty w 2D kładziemy na płaszczyznę zespoloną.
- Obrót jest mnożeniem przez liczbę zespoloną o module 1, a odbicie jest sprzężeniem zespolonym.

$$e = 1, \quad R_1 = e^{i\pi/2}, \quad R_2 = e^{i\pi}, \quad R_3 = e^{i3\pi/2} \quad R_n(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{i\frac{2\pi}{n}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{n}} \end{bmatrix}$$

- Podgrupy obrotów: $\mathbb{Z}_4 = \{e, R_1, R_2, R_3\}$ lub $\mathbb{Z}_2 = \{e, R_2\}$ możemy reprezentować liczbami zespolonymi.
- Jaki jest „zysk” zapisu w postaci zespolonej?

Ideą tych zabiegów jest pomysł, że „zapominamy” o rzeczywistym kwadracie, a zostawiamy jedynie reprezentacje i ogólne własności grupy.

Formalna definicja grupy

Grupa jest zbiorem elementów i określonym na niej działaniem matematycznym (np. mnożeniem), przy czym spełnione są warunki:

- **Łączność** – dla wszystkich elementów g_i grupy zachodzi: $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.
- **Wewnętrzność** – dla elementów grupy $g_i \in G$, $g_i g_j \in G$, czyli złożenie dwóch symetrii też daje element należący do grupy
- Istnieje **element neutralny** grupy e , taki, że: $eg = ge = g$, dla dowolnego g .
- **Odwracalność** - dla każdego $g \in G$ istnieje **element odwrotny** g^{-1} , taki, że $g^{-1}g = gg^{-1} = e$, czyli, że symetria może zostać odwrócona do początkowego stanu.

Dodatkowo:

- ✓ gdy $g_1g_2 = g_2g_1$ dla każdych $g_1g_2 \in G$ grupę nazywamy **Abelową** (przemienne), a działanie matematyczne komutuje,
- ✓ gdy $g_1g_2 \neq g_2g_1$, grupa jest **nieabelowa**, a działanie nie komutuje.



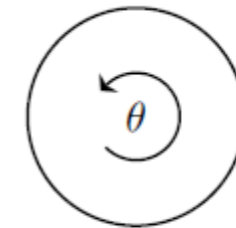
Niels Henrik Abel (1802–1829)
–norweski matematyk

Wybrane aspekty teorii grup – symetria ciągła

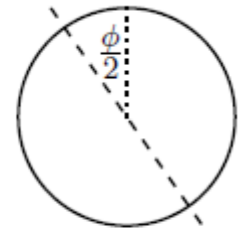
Grupa dihedralna D_n przy $n \rightarrow \infty$ daje symetrię okręgu – 2-wymiarową (2d na płaszczyźnie) **ortogonalną grupę $O(2)$** .

- Tablice mnożenia:

	$R(\theta_2)$	$P(\phi_2)$
$R(\theta_1)$	$R(\theta_1 + \theta_2)$	$P(\phi_2 - \theta_1)$
$P(\phi_1)$	$P(\phi_1 + \theta_2)$	$R(\phi_1 - \phi_2)$



$R(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)$



$P(\phi) \mid \phi \in [0, 2\pi)$

- Elementy reprezentacji nie komutują: $R(\theta)P(\phi) \neq P(\phi)R(\theta)$?
- Grupa ortogonalna $O(2)$ może być reprezentowana przez macierze 2x2 działające na dowolny punkt okręgu (a, b) :

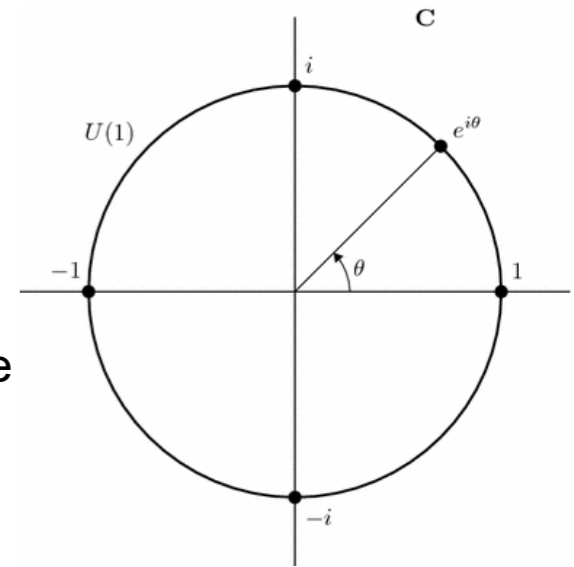
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad P(\phi) = \begin{pmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

- Czy w fizyce są jakieś specjalne warunki dotyczące rodzaju macierzy, które reprezentują zachodzące procesy?
- Obie macierze spełniają warunek $MM^T = 1$, a ile wynosi $\det M$?

Ciągła grupa $U(1)$

Grupa $U(1)$:

- Elementem grupy $U(1)$ jest np. liczba zespolona: $z = e^{i\theta}$, $\theta \in R$.
- Grupa $U(1)$ to grupa jednostkowych macierzy 1×1 , zbiór liczb zespolonych o module $=1$ (okrąg jednostkowy na płaszczyźnie zespolonej)
- Grupa $U(1)$ jest abelowa $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- Grupa $U(1)$ ma jeden parametr.
- Grupa $U(1)$ opisuje symetrię cechowania pola elektromagnetycznego z zasadą zachowania ładunku (WdMS).



Reprezentacja grupy U(1)

- Reprezentacja grupy U(1): $D(\theta) = e^{i\theta}$.
- Pole ψ (z równania Diraca) jest przemnożone przez: $\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi$
- Grupa U(1) opisuje **lokalną symetrię cechowania** pola elektromagnetycznego z zasadą zachowania ładunku.



- Pole spinorowe $\psi(x)$ – symetrii cechowania: $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x)$
- „Zwykła” pochodna $\partial_\mu \psi$ jest zastąpiona* pochodną kowariantną $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

$$* \partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi) = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha) \psi)$$

- Pole A_μ transformuje się jak: $A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$ i wtedy pochodna pola transformuje się jak pole

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi$$

Lokalna symetria cechowania U(1) wprowadza pole, oddziaływanie elektronu z polem A_μ oraz zapewnia zachowanie ładunku elektrycznego.

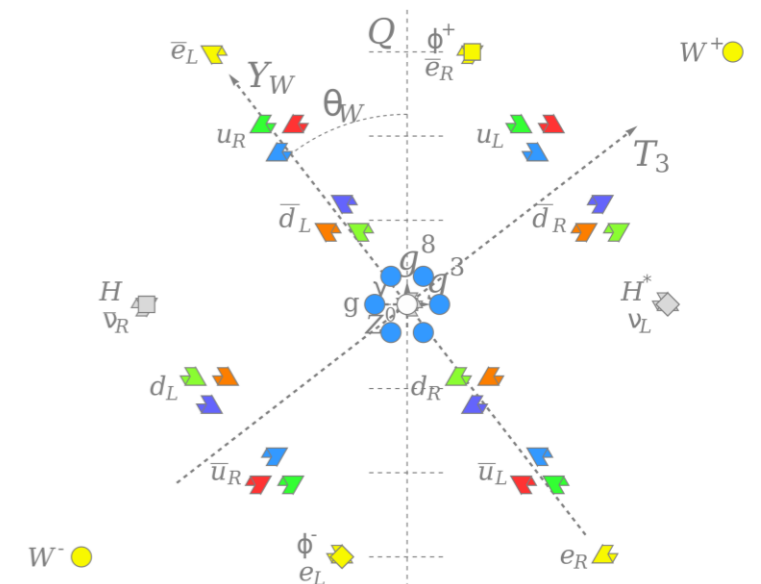
Grupy Lie

- W HEP ciekawe są grupy ciągłe ze specjalną algebrą – algebrą Lie:

Lie algebra: A Lie algebra \mathfrak{g} is a vector-space over some field F (real \mathbb{R} or complex numbers \mathbb{C}) with a bilinear Lie bracket operation $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ satisfying

- Alternativity:* $[X, X] = 0$ for all $X \in \mathfrak{g}$.
- Anti-commutativity:* $[X, Y] = -[Y, X]$ for all $X, Y \in \mathfrak{g}$.
- Bilinearity:* $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ for all $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ and $a, b \in F$.
- Jacobi identity:* $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

- 1930 E.Wigner wskazuje związek cząstek elementarnych ze strukturą grupy Lie i algebrą Lie.
- Elementy ciągłej grupy Lie powstają poprzez pewną operację na sobie.
- Cząstki (stany kwantowe) pochodzą z nieredukowalnych reprezentacji grupy Lie, a ich własności (masy, spektra) związane są z grupami Lie i symetriami natury.



Generatory grupy Lie

- Grupa Lie jest rozmaitością różniczkową – jeśli można określić infinitezymalne małe przekształcenie, to umiemy zbudować z niego wszystkie elementy grupy. Np z obrotu o 1° zrobimy: $R(45^\circ) = R(1^\circ)^{45}$
- Grupy unitarne są grupami Liego.
- Grupy Lie zapisuje się przy użyciu specjalnych funkcji zwanych generatorami:

$$A = e^{ig_A v^A}$$

g_A - generatory grupy,
 v^A - wektor parametrów

? przestrzenie dualne $g_A v^A$?

$g_A v^A$ to kombinacja przekształceń, np.: dla $SO(3)$ $g_A v^A = g_{xy}(\alpha) + g_{xz}(\beta) + g_{yz}(\gamma)$ to obroty o α, β, γ względem płaszczyzn xy, xz, yz

- Obroty w 3D to elementy grupy $SO(3)$, a jak znaleźć generatory tej grupy?

$$R_{yz}(\theta) = e^{ig_{yz}\theta} = I + ig_{yz}\theta + \frac{1}{2!}(ig_{yz}\theta)^2 + \frac{1}{3!}(ig_{yz}\theta)^3 + \dots$$

$$R_{yz}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \dots$$



Grupa U(1)

- Grupa $U(1)$ to najprostsza grupa Lie'go, składa się z unitarnych macierzy 1x1, czyli jest to zbiór liczb zespolonych o module 1.
 - ✓ $U(1)$ jest grupą abelową.
 - ✓ Dowolny element grupy $U(1)$ może być zapisany jako: $\alpha = \exp(i\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$
 - ✓ Reprezentacja $U(1)$ parametryzowana jest jedną liczbą q : $D_q(e^{i\theta}) = e^{i\theta q}$, $e^{i\theta q} \in U(1)$
- W fizyce działanie w grupie $U(1)$ oznacza przemnożenie stanu przez fazę $e^{i\theta q}$.
- Grupa $U(1)$ ma jeden generator $T = q$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta q} \psi$$

parametr grupy, odpowiadający za przekształcenie, symetrię w grupie – jaki?

generator grupy (ładunek)

- Reprezentacja grupy $U(1)$:

$$D(\theta) = e^{i\theta}$$

- Reprezentacja grupy Lie:

$$A = e^{ig_A v^A}$$

Grupa U(1) – generator i symetria cechowania (gauge)

- Transformacja cechowania w oddziaływaniu elektromagnetycznym polega na zmianie pochodnej i wprowadzeniu pola cechowania A_μ (foton – pole elm):

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$$

- Pochodna kowariantna \mathcal{D}_μ działa na pola:

$$\mathcal{D}_\mu \psi = (\partial_\mu + iqA_\mu) \psi$$

dzięki temu poprawnie działa na nie lokalna transformacja cechowania:

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) \rightarrow e^{iq\alpha(x)} \mathcal{D}_\mu \psi(x)$$

- Transformacja pól (po wprowadzeniu pochodnej kowariantnej i pola cechowania) jest identyczna jak działanie generatora grupy U(1)

wewnętrzna symetria grupy U(1) jest tożsama z lokalną transformacją cechowania w elektromagnetyzmie – czy są inne grupy opisujące pozostałe oddziaływania?
Dzięki można by było znaleźć bozony pośredniczące w pozostałych dwóch oddziaływaniach.

Grupa $SU(2)$

- Grupa unitarnych macierzy 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem (grupa Liego).
- W MS oddziaływania słabe mają symetrię grupy $SU(2)$.
- Dokładniej – lewoskrętne fermiony podlegają symetrii grupy $SU(2)_L$ jako dublety:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

czyli neutrino przekształca się (obraca) na elektron (z emisją W),

fermiony prawoskrętne nie są „zauważane” przez oddziaływania słabe.

Elektron i neutrino są związane symetrią grupy $SU(2)$, poprzez oddziaływania słabe, czyli emisję W .

$$L' = \text{generator } L$$

Grupa SU(2) – rola generatorów

- Każdy element grupy SU(2) można zapisać jako: $U = e^{i\theta^a T^a}$,

θ^a - parametry transformacji (kąty), T^a - generatory SU(2), np. w postaci macierzy Pauliego $T^a = \frac{1}{2}\sigma^a$

$$\sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Dublet $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ transformuje się, jak $L \rightarrow e^{i\theta^a T^a} L$, a można rozwinąć: $L \rightarrow (I + i\theta^a T^a + \dots)L$

np. dla T^3 mamy: $U = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_3}$ i przekształcimy wektor $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$:

$$U\psi = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} \psi_1 \\ e^{-i\theta/2} \psi_2 \end{bmatrix}$$

dublet $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ został obrócony w wewnętrznej, abstrakcyjnej symetrii grupy,

Grupa SU(2) – rola generatorów

✓ przepis na obrót (symetrię):

$$U = e^{i\theta^a T^a} \quad T^a = \frac{1}{2} \sigma^a$$

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

✓ dla σ_3 najprościej?

$$U\psi = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{bmatrix}}_{\sigma_3} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\theta/2} \psi_1 \\ e^{-i\theta/2} \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \equiv a(\nu_e) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b(e) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ dla σ_1 i σ_2 jeszcze mniej intuicyjne:

$$e^{i\theta T^1} \cdot \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix} \approx (I + i\theta T^1) \begin{bmatrix} \nu_e \\ e^- \end{bmatrix}$$

$$T^1 \sim \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

co reprezentuje θ ?

$$L \rightarrow e^{i\theta^a T^a} L = (I + i\theta^a T^a + \dots)L$$

dublet $L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$ został obrócony w wewnętrznej, abstrakcyjnej symetrii grupy,

- lewoskrętne fermiony się mieszają, jedno zamienia się w drugie,
- elektron i neutrino należą tej samej struktury matematycznej (dubletu), „obracają się”,
- oddziaływania słabe powodują zmianę (obróć) wewnątrz dubletu, ale dopiero emisja W powoduje zmianę cząstki

Grupa $SU(3)$

- Grupa $SU(3)$, to grupa unitarnych macierzy 3×3 z jednostkowym wyznacznikiem.
- W MS oznacza transformacje pomiędzy trzema stanami, np. kwarkowymi (red, green, blue) – grupa $SU(3)_C$.
- Symetria $SU(3)_C$ opisuje „rotacje” pomiędzy kolorowymi stanami kwarkowymi.
- Generatory grupy $SU(3)_C$ powinny mieć związek z gluonami – nośnikami oddziaływań silnych.
- Generatory – np. macierze Gell-Manna (pomnożone przez $\hbar/2$) (grupa Lie).

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2}$$

$$T_1 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_5 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_7 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T_8 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

Grupa SU(3)

- Kwarki występują w trzech kolorach (są trypletami koloru):

$$q = \begin{pmatrix} q_r \\ q_g \\ q_b \end{pmatrix}$$

- Transformują się jako: $q \rightarrow U(x)q$, $U(x) \in SU(3)$.
- Jest 8 generatorów, zatem 8 gluonów:
- Gluony są kolorowe i oddziałują ze sobą.
- Na wzór elm wprowadzane są pola cechowania
- Grupa SU(3) jest nieabelowa

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s G_\mu^a T^a$$

Grupa SU(3) – rotacje pomiędzy kwarkami

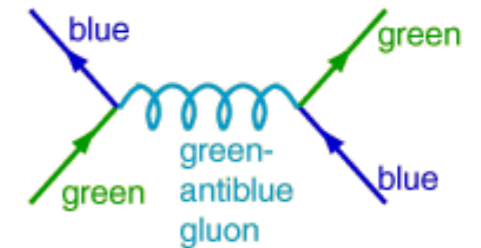
- Każdy stan kwarkowy zapiszmy w postaci: $q_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $q_b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Zadziałajmy macierzą Gell-Manna: $\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$T^1 q_r = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} q_g$$

czyli generator T_1 zamienia część czerwonego kwarka na zielony....

Oznacza to wymianę gluonu $\bar{r}g$ ($g_{\bar{r}g}$)



[HyperPhysics](#)