



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

Model Standardowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Mechanika klasyczna

- Lagranżjan
- Hamiltonian
- Zasada najmniejszego działania

Lagranżjany pól

Równanie Schrödingera

Równanie Kleina-Gordona

Funkcja Lagrange'a

- Model Standardowy opiera się na Kwantowej Teorii Pola (QFT).
- Zarówno w mechanice klasycznej, jak i QFT w opisie dynamiki układu pomocna jest funkcja Lagrange'a (tzw. Lagranżjan)

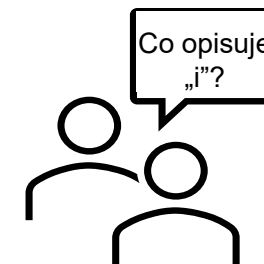
Mechanika klasyczna:

- Równanie ruchu: $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ wyprowadzić można znając lagranżjan i równania Eulera-Lagrange'a.
- Dla sił zachowawczych mamy: $\vec{F} = -\nabla U$.
- Lagrażjan to funkcja **uogólnionych współrzędnych** q_i i ich pochodnych czasowych $\dot{q}_i$
- Lagranżjan to różnica energii kinetycznej i potencjalnej:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$$

- Równania Eulera-Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$



Funkcja Lagrange'a

Przykłady (równania E-L we współrzędnych uogólnionych), wyznaczyć równania ruchu :

- Ruch jednej cząstki w polu o energii potencjalnej $U(\vec{r})$, $q_i = \{x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\}$
- Ruch wahadła matematycznego (energia kinetyczna i potencjalna jako funkcje $q_i \equiv \theta$)

zastosować równania E-L

Zasada Hamiltona

Zasada Hamiltona (zasada najmniejszego działania):

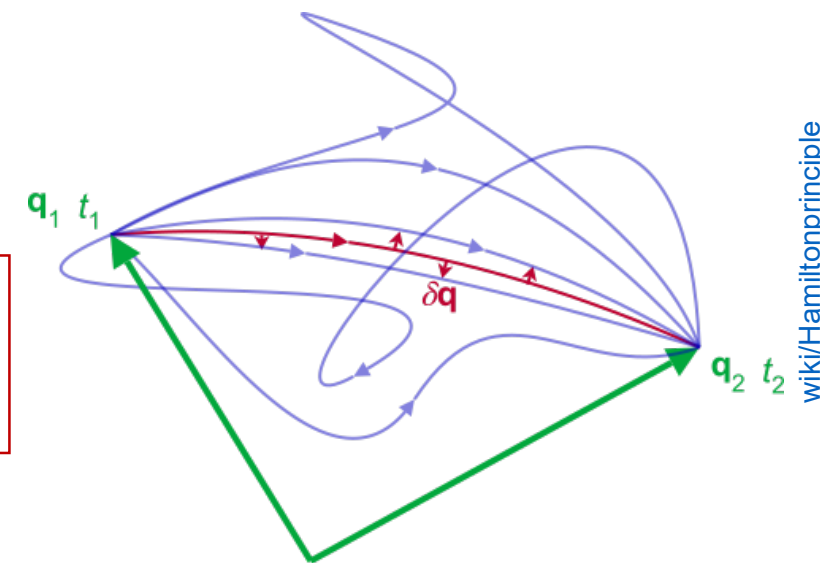
- opis układów dynamicznych z wykorzystaniem analizy wariacyjnej.
- zastosowanie w mechanice klasycznej i teorii pola.

Ruch układu fizycznego odbywa się w taki sposób, że całkowita wartość działania S , zdefiniowanego jako całka z funkcji Lagrange'a, przyjmuje wartość ekstremalną (najczęściej minimalną).

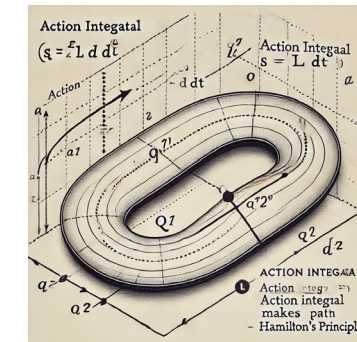
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = 0$$

zasada najmniejszego działania



Funkcja Hamiltona



- Zasada Hamiltona (w większości zastosowań, które nas tu interesują) jest równoważna równaniom Eulera-Lagrange'a (N punktów materialnych, k więzów, $n = 3N - k$ stopni swobody, czyli n równań różniczkowych 2-go rzędu :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

- Jest jednak czasem wygodniejsza – zamiast n równań różniczkowych 2-go rzędu, mamy $2n$ równań 1-go rzędu.
- Wprowadzamy pędy uogólnione:

$$p_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, 2, \dots, n$$

- Definiujemy funkcję Hamiltona:

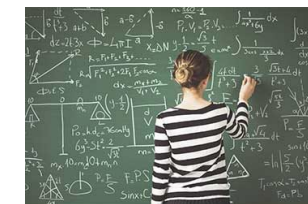
$$H = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Równania Hamiltona

- Równania Hamiltona jest to układ $2n$ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- Równania te nazywane też są równaniami kanonicznymi
- Hamiltonian jest często (gdy współrzędne uogólnione nie zależą jawnie od czasu) sumą energii kinetycznej i potencjalnej: $H = T + V$ (pokazać)



Przykład:

Rozpatrz ruch punktu materialnego w polu sił potencjalnych, napisz Hamiltonian, działanie i wyprowadź równania ruchu

Równania Hamiltona - przykłady

Hamiltonian jest często (gdy współrzędne uogólnione nie zależą jawnie od czasu) sumą energii kinetycznej i potencjalnej: $H = T + V$ (pokazać)

Rozpatrz ruch punktu materialnego w polu sił potencjalnych, napisz Hamiltonian, działanie i wyprowadź równania ruchu.



Równanie Schrödingera



Równania Hamiltona w mechanice kwantowej nazywają się równaniem Schrödingera:

$$H = T + V \qquad H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

- wprowadzany operatory energii i pędu:

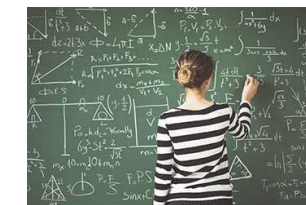
$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

- Zatem całkowita energia cząstki $E = T + V$ zapisana jest jako:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x^2} + \hat{V}(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \psi$$

- Rozwiązanie R.S. $\Psi(\vec{x}, t)$ zawiera pełną informację o stanie kwantowym.
- Funkcja falowa nie ma interpretacji fizycznej, ale jej kwadrat modułu $|\Psi(\vec{x}, t)|^2$ określa gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w danym miejscu i czasie.
- Równanie ciągłości – zasada zachowania prawdopodobieństwa



Równanie Schrödingera – równanie ciągłości

gęstości prawdopodobieństwa:

$$\rho(x, t) \equiv \Psi \Psi^* = |\Psi(\vec{x}, t)|^2$$

prąd prawdopodobieństwa:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

- Równanie ciągłości – zasada zachowania prawdopodobieństwa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

- Zmiana gęstości prawdopodobieństwa jest możliwa, gdy mamy „wypływ” prawdopodobieństwa
- Te same rachunki wykonamy dla równania Kleina-Gordona i Diraca



Równanie Schrödingera – równanie ciągłości



$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi.$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V\psi^*.$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez ψ^* , a drugie przez ψ , i odejmijmy:

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*).$$

Lewą stronę można zapisać jako $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (|\psi|^2)$, a prawą jako $-\nabla \cdot \mathbf{j}$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Mechanika relatywistyczna - przypomnienie

- MS jest opisywany przez równania relatywistyczne.
- Obiekty MS opisywane są w 4-wymiarowej przestrzeni.
 - wektor kontrawariantny (def): $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
 - kowariantny tensor metryczny (def):

$$g_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- wektor kowariantny: $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3)$
- Iloczyn skalarny czterowektorów:

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^\mu y_\mu$$



Transformacja Lorentza

Transformacja Lorentza jest to takie przekształcenie, które nie zmienia iloczynu skalarnego czterowektorów

$$x \rightarrow x' = \Lambda x$$

$$x' \cdot y' = x \cdot y$$



Funkcja Lagrange'a - pola



- W QFT zamiast cząstek mamy pola, których wzbudzenia interpretujemy jako cząstki.
- Pola są ciągłymi funkcjami współrzędnych czasoprzestrzennych x^μ .
- W QFT wprowadza się **gęstość lagranżianu**- to funkcja pól i pochodnych pól:

$$L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}(\phi_i(x^\mu), \partial_\mu \phi_i)$$

- Gęstość lagranżjanu jest zdefiniowana dla punktu w czasoprzestrzeni.
- Jeśli L (lagtanżjan) określimy jako energię, skalar opisujący cały układ, to gęstość Lagranżjanu $\mathcal{L}$ określa energię na jednostkę objętości

$$L = \int \mathcal{L} d^3x$$

? (zad*)

Niezbędnik relatywistyczny:

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, x, y, z)$$

$$x_\mu = (x^0, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z)$$

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

* W jaki sposób transformują się pochodne czterowektorów, jako wektory ko- czy kontrawariantne?

Pola - wymagania

- Pole $\phi(x^\mu)$ w każdym punkcie czasoprzestrzeni powinno się transformować wzg. transformacji Lorentza (TL) jak: skalar lub wektor lub tensor.

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad x'^\mu = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$$

ten sam punkt czasoprzestrzeni - $\phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu)$

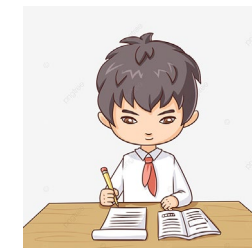
- Rozważmy teraz małą zmianę pola $\phi(x^\mu)$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

powinna być niezmiennicza wzgl. TL (Lorentz Invariant – LI)

dx^μ jest 4-wektorem kontrawariantnym,
jakim zatem wektorem powinno być $\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}$?

uwaga: współrzędne „'” odnoszą się zawsze do układu po przekształceniu. np. TL lub symetrii gauge



Pochodne czterowektorów

- Operatory pochodnych (4-gradienty): $\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$

transformują się jak:

$$\partial_{\mu} \rightarrow \partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}$$

odwrotna TL

$$\partial^{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

$$\partial^{\mu} \rightarrow \partial'^{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial^{\nu}$$

TL

niespodziewane?

- Jeśli zatem $\phi(x^{\mu})$ jest funkcją skalarną, to pochodne:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi \right) \equiv \partial_{\mu} \phi$$

kowariantny 4-wektor

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}, -\nabla \phi \right) \equiv \partial^{\mu} \phi$$

kontrawariantny 4-wektor

- Operator d'Alemberta: $\square \equiv g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$
- również jest niezmiennikiem TL



Gęstość lagranżjanu

- W QFT „wystarczy” podać odpowiedni lagranżjan i mamy dobrą teorię dla zadanych pól.
- Podobnie, jak w mechanice klasycznej, zasada minimalnego działania prowadzi do równań typu Eulera – Lagrange’a, czyli równań pola

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

Pole skalarne – $\mathcal{L}$

Przykład: swobodna (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagrangianu $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$$

Jakie równanie dostaniemy z równań Eulera – Lagrange’a?

Niezbędnik:

Jak rozumieć zapis $(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)$?

Stosowana jest tzw. konwencja sumowania po powtarzających się wskaźnikach, czyli *:

$$(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) \equiv (\partial_0 \phi)(\partial_0 \phi) - (\partial_1 \phi)(\partial_1 \phi) - (\partial_2 \phi)(\partial_2 \phi) - (\partial_3 \phi)(\partial_3 \phi)$$



Pole skalarne – $\mathcal{L}$

Przykład: swobodna (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagrangianu $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

Jakie równanie dostaniemy z równań Eulera – Lagrange’a?

.....(dokończyć)...

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi$$

równanie Kleina-Gordona



Zadanie: Zapisać równanie Kleina-Gordona we współrzędnych sferycznych, a następnie pokazać, że funkcja (tzw. potencjał Yukawy) $\Psi(r) = \frac{g_0}{4\pi r} e^{-r/R}$, gdzie $g_0, R = \frac{1}{m}$ to stałe, jest jego rozwiązaniem. Jak zinterpretować $\Psi(r)$ dla $m = 0$?

Pole skalarne – $\mathcal{L}$



$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - m^2 \phi^2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right) = \partial_\mu (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi$$

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - m^2 \phi = 0$$

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

$$(\square - m^2) \phi = 0$$

równanie Kleina-Gordona:

- dla $m = 0$ staje się równaniem falowym i opisuje pole elektromagnetyczne
- dla $m \neq 0$ opisuje swobodną cząstkę o spinie 0, człon masowy oznacza np. pole Higgsa

Pole wektorowe – $\mathcal{L}$

- Pole swobodnej cząstki wektorowej (o spinie 1, np. fotonu) opisane jest przez czterowektor A^μ i gęstość lagrangianu:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu$$

- Definiujemy tzw. tensor elektromagnetyczny $F^{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$ i zapisujemy:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu$$

- A równania pola wyglądają tak:

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

- Jak mamy do czynienia np. z fotonem ($m = 0$), to powinni z tego wyjść równania Maxwella...



Pole wektorowe – $\mathcal{L}$



- Gdy: $A^\mu = (\phi, \vec{A})$

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

- Wyznaczyć elementy tensora elektromagnetycznego:

$$F^{\mu\nu}$$

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

- Napisać pole wektorowe Proca dla $m = 0$.

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \Rightarrow & \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & & \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$