AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE
AGH UNIVERSITY OF KRAKOW

Model Standardowy

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej
Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek

Grupy i symetrie w fizyce
(zwłaszcza cząstek
elementarnych)

agh.edu.pl

Opis cząstki w mechanice kwantowej

- Stan cząstki – funkcja falowa: $\Psi(\vec{x},t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-Et)}$.
- Kinematyka:

  Równanie Schrödingera: $i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\Psi(\vec{x},t)}{\partial x^2} + \hat{V}(\vec{x},t)$

  opisuje cząstki nierelatywistyczne

- Równanie ruchu: $i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} = H(x)\,\Psi$

H określa dynamikę układu, $\Psi(\vec{x},t)$ zawiera informację o pozycji cząstek

- Transformacje do innego układu $x \rightarrow x'$ i funkcja falowa $\Psi'(x')$ powinna opisywać to samo zdarzenie co $\Psi(\mathrm{x})$, a związek jest, np poprzez pewien operator U:

$$\Psi'(x') = U\,\Psi(x)$$

- Dwa rodzaje transformacji:

  zmiana układu (opisu współrzędnych) $x \rightarrow x' \equiv f(x)$

  transformacji funkcji falowej (stanu układu): $\Psi \rightarrow \Psi' \equiv U\,\Psi$

Przekształcenia funkcji falowych i operatorów

- Zapis bra-ketowy: $\Psi_a \equiv |a\rangle$, wtedy: $\Psi'_a \equiv U\,\Psi_a$, co zapisujemy jako $|a'\rangle = U|a\rangle$

  a dla „przestrzeni dualnej”: $\Psi'^{\dagger}_a \equiv \Psi^{\dagger}_a U^{\dagger}$ zapiszemy $\langle a'| = \langle a'|U^{\dagger}$

- Dla dwóch dowolnych stanów $|a\rangle$ i $|b\rangle$, mamy działający na nie operator:

  $|a\rangle \to |Ua\rangle$ oraz $|b\rangle \to |Ub\rangle$

- Jeśli po transformacji amplitudy procesów maja się nie zmienić, czyli $|\langle a|b\rangle| = |\langle Ua|Ub\rangle|$, to:

  $\langle a|b\rangle = \langle Ua|Ub\rangle$ i U jest unitarny   LUB $\langle a|b\rangle^* = \langle Ua|Ub\rangle$ i U jest antyunitarny

- Iloczyn $\langle b'|a'\rangle = \langle b|U^{\dagger}U|a\rangle$ i jest równy $\langle b|a\rangle$ dla dowolnych Ψ_a, Ψ_b gdy $U^{\dagger}U = I$.

  $\Rightarrow$ transformacja funkcji falowych jest unitarna.

Przekształcenia unitarne

- Rozważmy obserwablę A i element macierzowy $\langle b|A|a\rangle \equiv \int \Psi_b^\dagger\, A\, \Psi_a\, d^3x$

Chcemy, aby $\langle b'|A'|a'\rangle = \langle b|A|a\rangle$ dla każdego Ψ_a i Ψ_b.

Mamy:

$$\left\langle b\middle|U^\dagger A' U\middle|a\right\rangle = \langle b|A|a\rangle$$

$$\Rightarrow U^\dagger A' U = A$$

$$\Rightarrow A' = U^\dagger A\, U$$

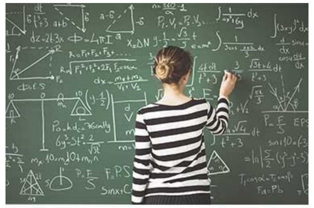
Gdy A ma być niezmienione, to $A = A'$

$$\Rightarrow A = U^\dagger A' U$$

$$\Rightarrow UA = AU$$

$$[A, U] = 0$$

Jaką postać mógłby mieć operator U, taki że $\Psi \rightarrow \Psi' = U\,\Psi$?



np. $U = \exp(iaX)$, a funkcję X nazywamy wtedy generatorem transformacji

Przekształcenia unitarne i symetrie

- Transformacja (przekształcenie)

$H \to H' = U\,H\,U^\dagger$, $U\,U^\dagger = I$, stąd U jest unitarne

$\Psi \to \Psi' = U\,\Psi$

dają: $i\hbar \frac{\partial \Psi\prime(\vec{x},t)}{\partial t} = H'(x)\,\Psi'$

- Układ ma pewną symetrię (to jest symetria operatora), gdy $H = H'$

$$U\,H\,U^\dagger = H$$

$$U\,H = H\,U$$

$$[H, U] = 0$$

np: $[H, \exp(iaX)] = 0$ => $[H, \exp(iaX)] = 0$ oraz $\left[H, \sum \frac{1}{p!}(iaX)^p\right] = 0$

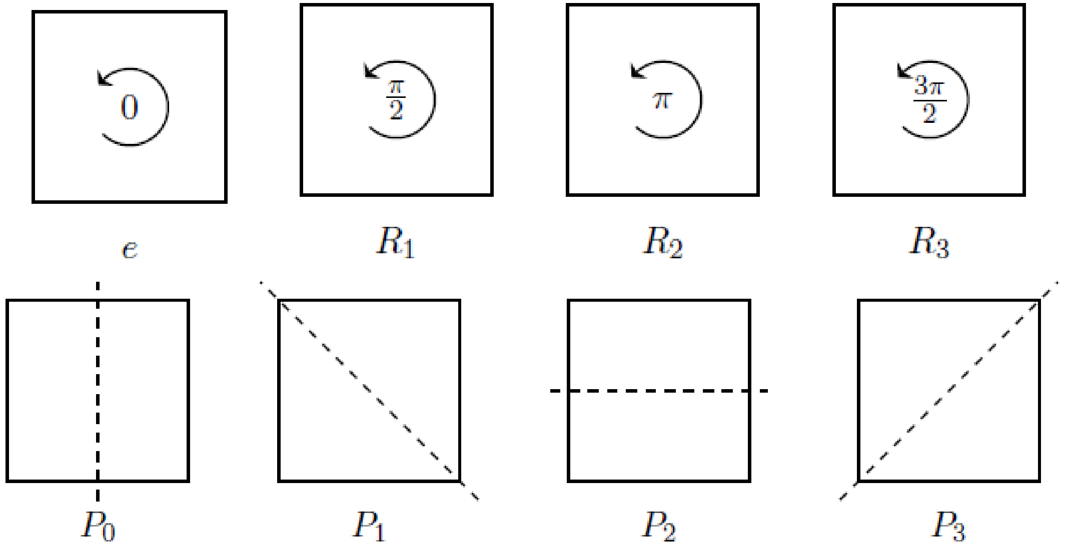
no dla każdego „a” mam $[H, X] = 0$

Jeśli Hamiltonian układu jest niezmienniczy względem transformacji unitarnej generowanej przez operator (hermitowski) X, to oznacza istnienie zasady zachowania związanej z tym operatorem X.

Wybrane aspekty teorii grup – symetria dyskretna

Rozważmy symetrie kwadratu:

- obrót o $\pi/2$ wzg. środka pozostawia kwadrat w stanie niezmienionym:
  - ✓ Istnieją trzy nietrywialne obroty i jeden neutralny.
- Kwadrat również nie zmieni się, przy odbiciach (transformacji parzystości przestrzennej).



Kwadrat ma 8 transformacji, które twoarzą grupę dihedralną (wielokąty): $D_4 = \{e, R_1, R_2, R_3, P_0, P_2, P_3\}$

Każde dwie transformacje tworzą nowy element grupy,

⇒ tablice mnożenia (czyli dodawania kolejnych obrotów) $R_{\pi/2}R_{\pi} = R_{3\pi/2}$

(elementy komutują?):

	g_1	g_2	$\cdots$
g_1	g_1g_1	g_2g_1	$\cdots$
g_2	g_1g_2	g_2g_2	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\Longrightarrow$

	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
e	e	R_1	R_2	R_3	P_0	P_1	P_2	P_3
R_1	R_1	R_2	R_3	e	P_3	P_0	P_1	P_2
R_2	R_2	R_3	e	R_1	P_2	P_3	P_0	P_1
R_3	R_3	e	R_1	R_2	P_1	P_2	P_3	P_0
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	e	R_1	R_2	R_3
P_1	P_1	P_2	P_3	P_0	R_3	e	R_1	R_2
P_2	P_2	P_3	P_0	P_1	R_2	R_3	e	R_1
P_3	P_3	P_0	P_1	P_2	R_1	R_2	R_3	e

Reprezentacje

Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b).

Zatem najprostsza **reprezentacja** to macierze 2×2, np:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sprawdzam!

Reprezentacje

Jak można zapisać symetrię grupy D_4 w postaci macierzy?

- Działamy na punkty w 2D, czyli na element (a, b).
- Podgrupy obrotów: $\mathbb{Z}_4 = \{e, R_1, R_2, R_3\}$ lub $\mathbb{Z}_2 = \{e, R_2\}$ możemy reprezentować liczbami zespolonymi:

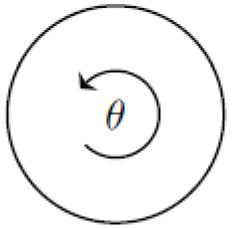
$$e = 1, \qquad R_1 = e^{i\pi/2}, \qquad R_2 = e^{i\pi}, \qquad R_3 = e^{i3\pi/2}$$

- A reprezentację (zespoloną) możemy zapisać jako:

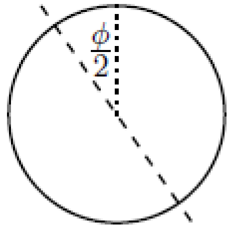
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ideą tych zabiegów jest pomysł, że „zapominamy” o rzeczywistym kwadracie, a zostawiamy jedynie reprezentacje i ogólne własności grupy (za chwilę)

Wybrane aspekty teorii grup – symetria ciągła



$R(\theta) \mid \theta \in [0, 2\pi)$



$P(\phi) \mid \phi \in [0, 2\pi)$

Grupa dihedralna D_n przy $n \to \infty$ daje symetrię okręgu – 2-wymiarową (2d na płaszczyźnie) ortogonalną grupę O(2).

- Tablice mnożenia:

	$R(\theta_2)$	$P(\phi_2)$
$R(\theta_1)$	$R(\theta_1 + \theta_2)$	$P(\phi_2 - \theta_1)$
$P(\phi_1)$	$P(\phi_1 + \theta_2)$	$R(\phi_1 - \phi_2)$

- Elementy reprezentacji nie komutują: $R(\theta)P(\phi) \neq P(\phi)R(\theta)$.

- Grupa ortogonalna O(2) może być reprezentowana przez macierze 2x2 działające na dowolny punkt okręgu (a, b):

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad P(\phi) = \begin{pmatrix} -\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

- Obie macierze spełniają warunek $MM^T = 1$, a ile wynosi $\det M$?

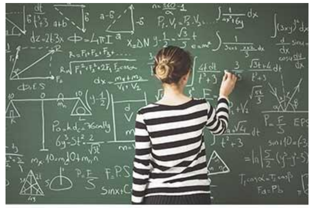
Formalna definicja grupy

Group: A *group* G is a set of elements with a product rule, such that

1. G is *closed* under group multiplication, i.e. $g_1 g_2 \in G$ for all elements $g_1, g_2 \in G$ — combining two symmetry operations is also a symmetry.
2. The group product is *associative*, i.e. $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ for all elements $g_1, g_2, g_3 \in G$ — symmetry operations are associative.
3. There exists a unique identity element $e \in G$ such that $eg = ge = g$ for any element $g \in G$ — there exists a trivial symmetry operation where nothing is done.
4. For every element $g \in G$, there exists a unique inverse $g^{-1} \in G$ such that $g^{-1} g = g g^{-1} = e$ — symmetry operations can be inverted to return to the original state.

If $g_1 g_2 = g_2 g_1$ for all $g_1, g_2 \in G$, the group G is called an *Abelian group* with a commutative product. If $g_1 g_2 \neq g_2 g_1$ for some $g_1, g_2 \in G$, the group G is called a *non-Abelian group* with a non-commutative product.

Czy grupy omówione za poprzednich slajdach są grupami?
A które grupami abelowymi?



Reprezentacja grupy - formalnie

Macierz N-wymiarowa $D(G)$ jest reprezentacją grupy G, gdy mapuje elementy G na zbiór $N \times N$ macierzy $G \to GL(N)$, takie, że:

- $D(e) = 1$;
- $D(g_1)D(g_2) = D(g_1 g_2)$, dla każdego $g_1, g_2 \in G$;
- Reprezentacja $D(G)$ jest unitarna, gdy $D(g)$ jest macierzą unitarną dla każdego $g \in G$;
- Grupy mogą mieć wiele reprezentacji.

W QFT interesują nas jedynie reprezentacje unitarne:

- Gdy teoria przewiduje grupę symetrii G, fizyczne stany powinny się transformować jak unitarne reprezentacje grupy:

$$|\psi\rangle \to D(G)|\psi\rangle$$

- Co prowadzi do wniosków:
  - ✓ iloczyn $\langle\psi|\psi\rangle$ pozostanie niezmienniczy względem tej symetrii,
  - ✓ operatory hermitowskie, które transformują się unitarną reprezentacją grupy pozostają hermitowskie po transformacji: $O \to D(G) O D(G)^{-1}$

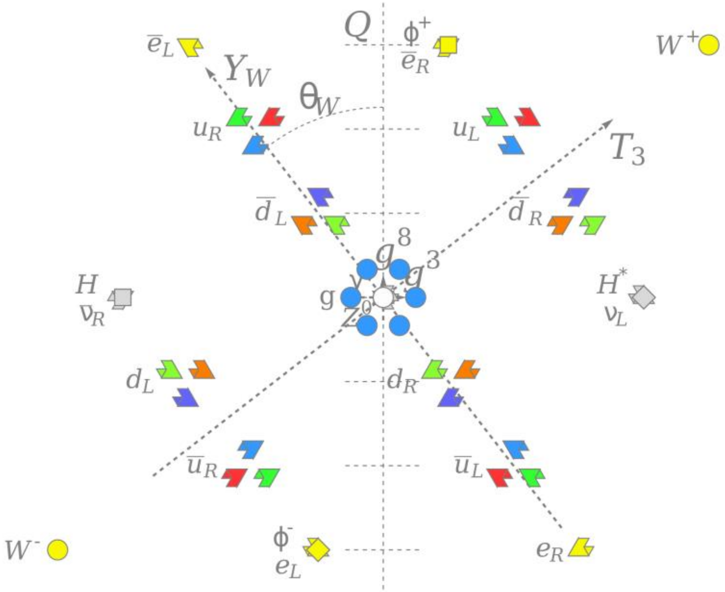
Grupy Lie

- W HEP ciekawe są grupy ciągłe ze specjalną algebrą – algebrą Lie:

Lie algebra: A *Lie algebra* $\mathfrak{g}$ is a vector-space over some field F (real $\mathbb{R}$ or complex numbers $\mathbb{C}$ with a bilinear Lie bracket operation $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ satisfying

1. *Alternativity*: $[X, X] = 0$ for all $X \in \mathfrak{g}$.
2. *Anti-commutativity*: $[X, Y] = -[Y, X]$ for all $X, Y \in \mathfrak{g}$.
3. *Bilinearity*: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ for all $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ and $a, b \in F$.
4. *Jacobi identity*: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

- 1930 E.Wigner wskazuje związek cząstek elementarnych ze strukturą grupy Lie i algebra Lie.
- Elementy ciągłej grupy Lie powstają poprzez pewną operację na sobie.
- Cząstki (stany kwantowe) pochodzą z nieredukowalnych reprezentacji grupy Lie, a ich własności (masy, spektra) związane są z grupami Lie i symetriami natury.



https://en.wikipedia.org/wiki

Generatory grupy Lie

- Grupa Lie jest rozmaitością różniczkową – jeśli można określić infinitezymalne małe przekształcenie, to umiemy zbudować z niego wszystkie elementy grupy. Np z obrotu o 1° zrobimy: R(45°) = $R(1°)^{45}$

- Grupy Lie zapisuje się przy użyciu specjalnych funkcji zwanych generatorami:

$$\boxed{A = e^{i g_A v^A}}$$

g_A - generatory grupy,
v^A - wektor parametrów

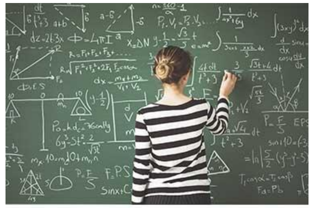
? przestrzenie dualne $g_A v^A$?

- $g_A v^A$ to kombinacja przekształceń, np.: dla SO(3) $g_A v^A = g_{xy}(\alpha) + g_{xz}(\beta) + g_{yz}(\gamma)$ to obroty o α, β, γ względem płaszczyzn xy, xz, yz

- Obroty w 3D to elementy grupy SO(3), a jak znaleźć generatory tej grupy?

$$R_{yz}(\theta) = e^{i g_{yz}\theta} = I + i g_{yz}\theta + \frac{1}{2!}\left(i g_{yz}\theta\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(i g_{yz}\theta\right)^3 + \cdots$$

$$R_{yz}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \cdots$$



Grupa U(1)

- Grupa U(1) to najprostsza grupa Lie'go, składa się z unitarnych macierzy 1x1, czyli jednej liczby (zespolonej).
  - ✓ U(1) jest grupą abelową.
  - ✓ Dowolny element grupy U(1) moze być zapisany jako:
  $$\alpha = \exp(\theta)\,, \qquad \theta \in [0,2\pi)$$
  - ✓ Reprezentacja U(1) parametryzowana jest jedną liczbą q:
  $$D_q\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\theta}, e^{i\theta} \in U(1)$$
- Działanie grupy U(1) to $D_q(\theta) = q\theta$ dla każdego elementu (kąta) $\theta \in U(1)$.
- Dla generatora grupy U(1): $D_q(T_0) = q\hbar$ (wkrótce okaże się, że q to ładunek).
- Zespolone pole ϕ transformuje się w reprezentacji D_q grupy U(1), gdy dla $e^{i\theta} \in U(1)$ mamy:
$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta}\,\phi$$

Grupy specjalne SU(N)

- Grupy SU(N) reprezentują wewnętrzną symetrię Modelu Standardowego.
- Są to grupy unitarnych macierzy U o wymiarze $N \times N$, czyli $UU^{\dagger} = U^{\dagger}U = 1$ oraz $\det U = 1$, czyli:

$$U_i^k U_k^j = U_k^j U_i^k = \delta_{ij}, \qquad i, j, k = 1.., N$$

U_j^i - elementy macierzy U, a $U_i^j \left(U_j^i\right)^*$ = - macierzy $\left(U^{\dagger}\right)^T$,

- SU(N) tworzą grupę Lie'go z $N^2 = 1$ parametrami, z taką samą liczbą generatorów postaci T_a, $a = 1,2,.., N^2 - 1$.
- Model Standardowy ma symetrię $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ z 8+3+1 transformacjami.

Grupa SU(2)

- Grupa unitarnych macierzy 2×2 z jednostkowym wyznacznikiem.
- Generatory – macierze Pauliego $g_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ (grupa Lie), σ_i-macierze Pauliego, spełniają $U^\dagger U = 1$ oraz $\det U = 1$,:

$$g_{yz} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x \qquad g_{zx} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y \qquad g_{xy} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z$$

- Generatory należą do SU(3) i działają na (zespolony) 2-elementowy obiekt (spinor), ale reprezentują obrót stanu spinowego w 3 wymiarach:
- Mając $A = e^{ig_A v^A}$ wyrazimy np. obrót $R_{yz}(\theta) = e^{ig_{yz}\theta} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\theta/2 \\ i\sin\theta/2 & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$
- Użyteczna jest baza złożona z kombinacji $T_i = g_i$:

$$T_\pm = T_1 \pm T_2; \qquad \mathrm{T}_3$$

- Z relacjami komutacyjnymi:

$$[T_+, T_-] = 2\hbar\, T_3; \qquad [T_3, T_\pm] = \pm\hbar\, T_\pm$$

agh.edu.pl

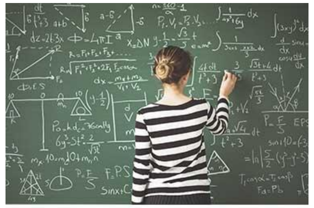
Grupa SU(3)

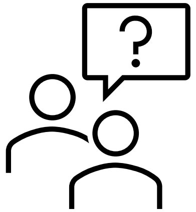
- Grupa unitarnych macierzy 3×3 z jednostkowym wyznacznikiem.
- Generatory – macierze Gell-Manna (pomnożone przez $\hbar/2$) (grupa Lie).

$$T_1 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_4 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_5 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_6 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_7 = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_8 = \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$





Grupa Lorentza

Grupa Lorentza i Poincare związane z symetrią czasoprzestrzeni (Szczególna Teoria Względności)