Podstawy fizyki
XIII. Mechanika relatywistyczna

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

AGH, WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~amucha

Fizyka klasyczna się kończy

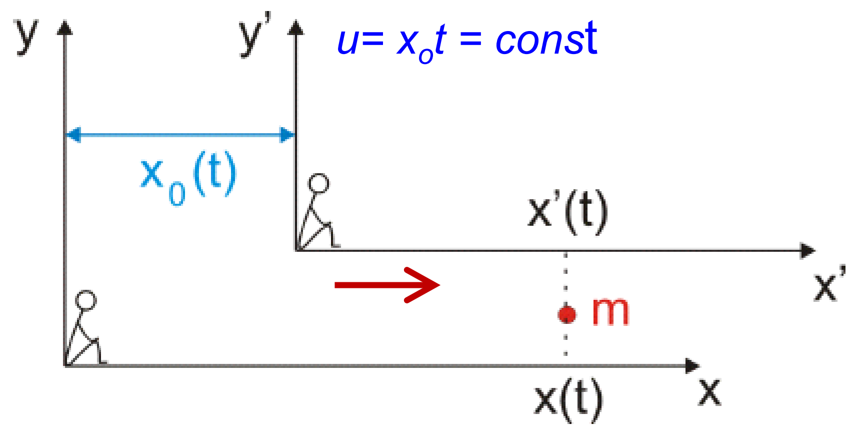
- Galileusz – (1564) - Prawa mechaniki są jednakowe we wszystkich układach inercjalnych (wykład 2).
- Jednostajny, prostpliniowy ruch układu odniesienia nie ma wpływu na zachodzące w nim zjawiska fizyczne.

Transformacja Galileusza

Nowy układ (y') porusza się ze stałą prędkością u.

położenie punktu m w nowym układzie:

$$x'(t) = x(t) - x_0$$



prędkość w nowym układzie:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}$$

$$v'(t) = v(t) - u$$

przyspieszenie w nowym układzie:

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt}$$

czyli: $a' = a \ - 0$

siły: $F' = F$

(tak samo w 3D)

Transformacja Galileusza - zmierzch

- Transformacja Galileusza dotyczyła procesów mechanicznych, pozwalała na znalezienie wartości danej wielkości fizycznej w nowym układzie odniesienia, o ile znana jest jej wartość w starym układzie odniesienia.

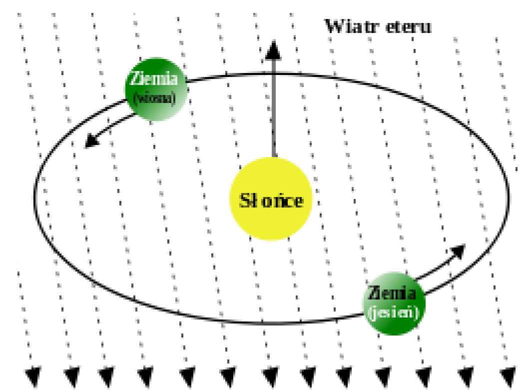
$$\begin{cases} x' = x - ut \\ t' = t \end{cases} \qquad\qquad v' = v - u$$

Mechanika klasyczna zakłada ponadto, że czas w obu układach odniesienia płynie jednakowo, masa nie zależy od prędkości ($m' = m$)

- XIX wiek – czy transformacja Galileusza jest dobra dla zjawisk falowych, a zwłaszcza dla światła? Czy $c' = c + u$, czyli czy prędkość światła jest większa, gdy jest wysyłana w poruszającym się pojeździe?
  - W XIX wieku uważano, że fale elm rozchodzą się w pewnej substancji wypełniającej przestrzeń - eterze

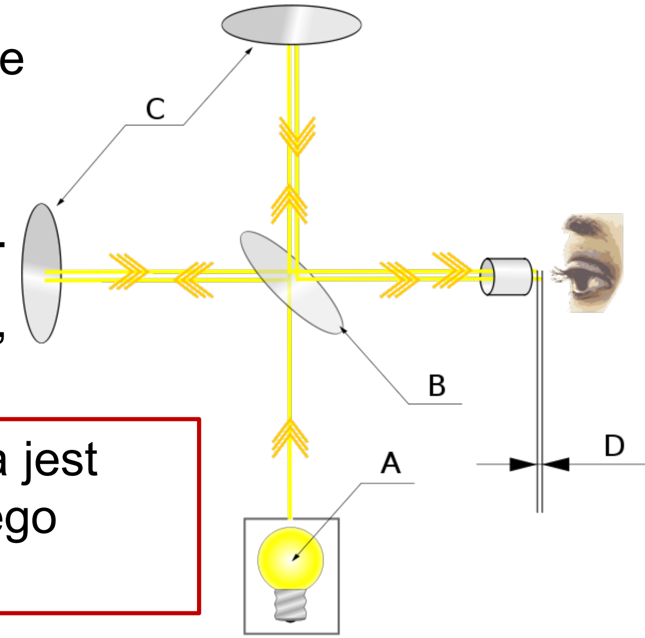
Eter

- Uważano, że przestrzeń wypełniona jest eterem (jak ośrodek śrężysty dla fal akustycznych), w którym rozchodzi się światło. Eter miałby pozostawać w spoczynku względem Wszechświata.
- Jeśli inny układ porusza się względem eteru i w nim wysyłane jest światło, do zgodnie z transformacją Galileusza $c' = c + V$.
    - Prędkość Ziemi na orbicie to $3 \cdot 10^4$ km/s – prędkość światła powinna zależeć od prędkości Ziemi! I powinna być różna dla lata i zimy, i różna w kierunkach wschód-zachód i północ-południe (jak to zmierzyć?)
- Hipotezy te zostały zweryfikowane w doświadczeniu Michelsona-Morley'a (1887)



Doświadczenie Michelsona-Morley'a

- Interferometr - dwa ciągi fal świetlnych są wysyłane ze wspólnego źródła, interferują ze sobą i punkcie obesrwacji wzmacniają się i wygaszają dając prążki (max i min natężenia) w zależności od przebytej drogi.
- Gdyby istniał eter – po obróceniu interferometru o 90^{o}, układ prążków by się zmienił.



Eksperyment dał wynik negatywny – prędkość światła jest taka sama i ruch Ziemi względem eteru nie ma żadnego znaczenia.

- W przypadku zjawisk elektromagnetycznych
nie istnieje żaden wyrożniony inercjalny układ odniesienia – nie ma eteru.
- Fale eletromagnetyczne mogą rozchodzić się w prożni, bez pośrednictwa ośrodka materialnego.
- Jednocześnie dodawanie prędkości wzgl Galileusza nie sprawdza się dla światła

Światło- jakie mamy oczekiwania

- Einstein 1905 – **szczególna teoria względności**,

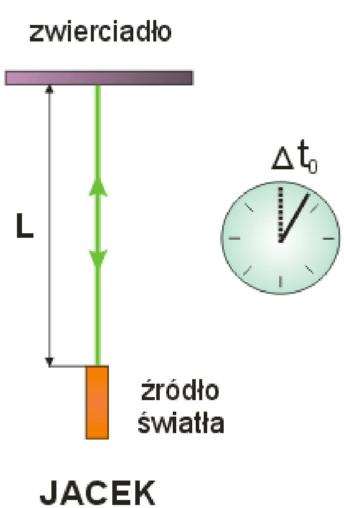
1. Jednostajny prostoliniowy ruch układu odniesienia nie ma wpływu na zachodzące w nim dowolne zjawiska fizyczne (mechaniczne, elektromagnetyczne i inne). Wszystkie inercjalne układy odniesienia są równouprawnione, nie można za pomocą żadnych doświadczeń fizycznych stwierdzić, czy dany układ pozostaje w spoczynku, czy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.
2. Prędkość światła w prożni nie zależy od prędkości obserwatora i źrodła światła i jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia.

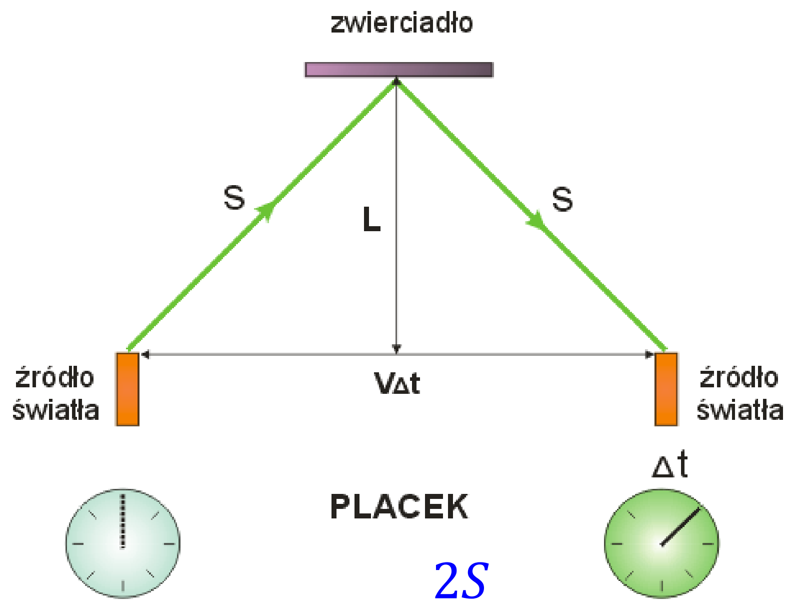
Kosztem spełnienia tych postulatów jest zmiana definicji czasu i przestrzeni.

Transformacja Galileusza zostaje zastąpiona **transformacją Lorentza**.

Czas w różnych układach

- Problem z dodawaniem prędkości – obserwator (Placek) stoi na peronie i widzi, jak światło (wysłane przez Jacka) biegnie w odjeżdżającym pociągu:





W układzie Placka światło przebywa dłuższą drogę – czas powienien też być dłuższy

$$\underbrace{\Delta t_0 = \frac{2L}{c} \qquad \Delta t = \frac{2S}{c}}_{\text{który wynik jest poprawny?}}$$

OBYDWA!

Interpretacja wyniku

Droga S przebyta przez światło: $S = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + L^2}$

$$S = \frac{1}{2}c\Delta t \qquad L = \frac{1}{2}c\Delta t_0$$

$$\frac{1}{2}c\Delta t = \sqrt{\left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t_0}{2}\right)^2}$$

Obydwa wyniki są poprawne, gdy:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\, \Delta t_0$$

czynnik Lorentza $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} > 1$

Czas zmierzony w ukł. spoczywającym Δt_0 – **czas własny**.

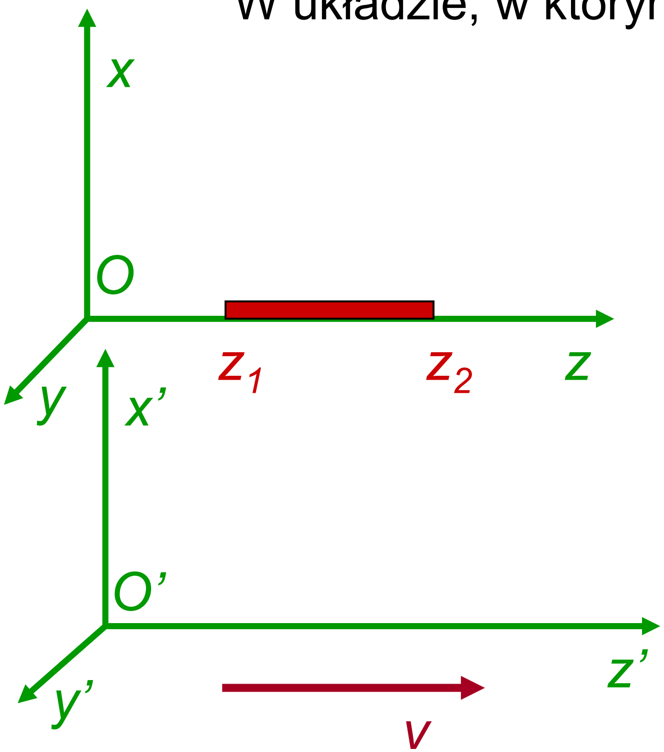
Dylatacja czasu – różnica $(\Delta t$ - $\Delta t_0)$

odstęp czasu Δt zmierzony przez Placka jest dłuższy od czasu Δt_0 uzyskany przez Jacka

Pomiar długości

- Pomiar długości w dwóch układach odniesienia:

W układzie, w którym pręt spoczywa: $l = z_2 - z_1$



ale układzie poruszającym się: $l' = z_2' - z_1'$

$$z_1 = \frac{z'_1 + v \cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad z_2 = \frac{z'_2 + v \cdot t}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$z_2 - z_1 = \frac{z'_2 - z'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

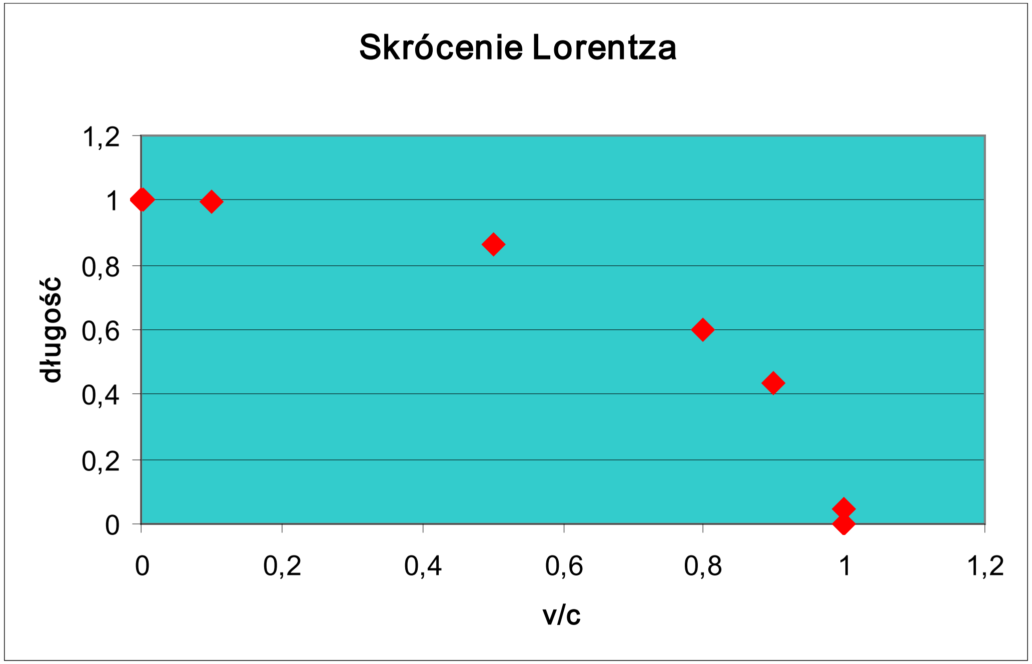
$$l' = l \cdot \sqrt{1-\beta^2} = \frac{l}{\gamma}$$

skrócenie Lorentza (kontrakcja długości)

Kontrakcja długości

- W układzie własnym mierzymy największą długość i najkrótszy czas.

Przykł: długość 1-metrowego pręta widziana przez nieruchomego obserwatora wzgl. prędkości preta



Przykł: Czas życia pionu: $\pi^{+} \rightarrow \mu^{+} \nu$ wynosi $\tau' = 2.5 \cdot 10^{-8} s$ (w jego układzie własnym), a t= $2.5 \cdot 10^{-6}\ s$ i droga d=750m w ukł. lab

$$\boldsymbol{t = \gamma\, \tau' > \tau'}$$

$$\boldsymbol{d = \gamma\, \lambda > \lambda}$$

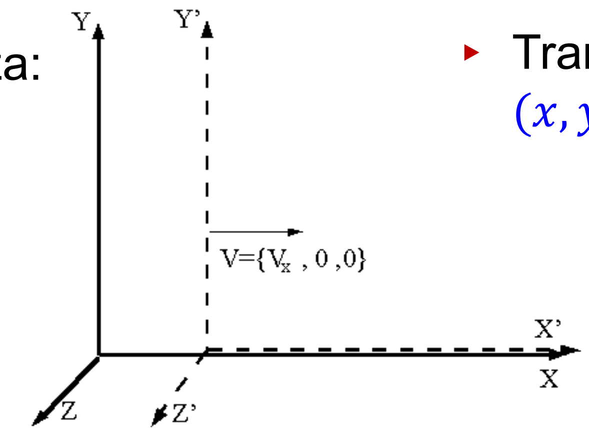
W układzie własnym cząstka żyje najkrócej i przebywa najmniejszą drogę do rozpadu

Transformacja Lorentza

- Utrzymanie stałej prędkości światła w każdym układzie odniesienia powoduje, że pojęcie czasu i odległości zmienia się i zależy od wyboru układu.

- Transformacja Lorentza:

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{x'} &= \boldsymbol{\gamma(x - v\,t)} \\ \boldsymbol{t'} &= \boldsymbol{\gamma\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right)} \end{aligned}}$$



- Transformacja odwrotna $(x, y, z, t) \rightarrow (x', y', z', t')$: $v \rightarrow -v$

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{v\,x'}{c^2}\right)$$

- Jednoczesność: Jeżeli dwa zdarzenia zachodzą w tym samym czasie ale w różnych miejscach układu S' to:

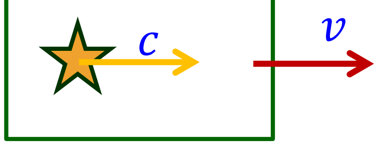
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right) = \gamma\frac{v\Delta x'}{c^2} \neq 0$$

zdarzenia nie są jednoczesne w układzie S (względność jednoczesności)

Składanie prędkości

- Galileusz:

$$u = u' + v$$



- Einstein:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}}}$$

$$c + c \neq 2c; \quad c + c = c$$

Składanie prędkości

- Galileusz:

$$u = u' + v$$

- Einstein:

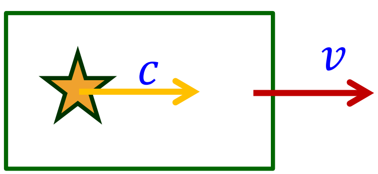
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + v}{1 + \frac{v \frac{\Delta x'}{\Delta t'}}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' v}{c^2}}}}$$

$$c + c \neq 2c; \quad c + c = c$$

- Przykł: światło w poruszającym się pociągu ma prędkość:

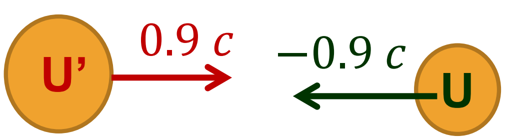
$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{c\,v}{c^2}} = c$$



- Przykł: dwie cząstki poruszające się w przeciwnych kierunkach z $v = 0.9\,c$:

z cząstką 1. $v = -0.9\,c$ wiążemy układ U,
z cząstką 2. $\mathrm{u} = +0.9\,c$ wiążemy ukł U',
w ukł. U cząstka 1. spoczywa, co oznacza, że prędkość 2 w ukł. U jest prędkością względną:

$$v = \frac{v + u}{1 + \frac{v\,u}{c^2}} = \frac{18\,c}{1 + 0.9^2} = \frac{1{,}8\,c}{1.91} \approx 0.994\,c$$



A.Obłąkowska-Mucha

Pęd relatywistyczny

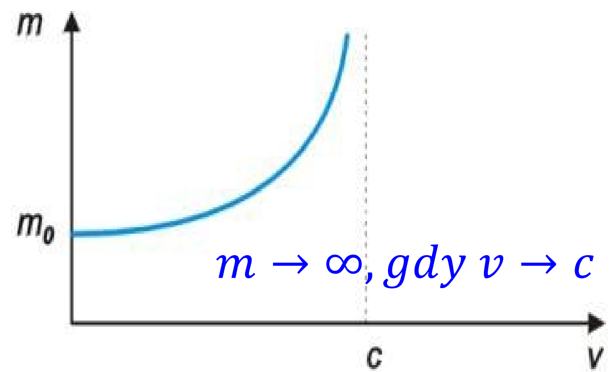
- Klasycznie: $p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t}$
- Relatywistycznie: czas – czas własny $\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma}$ i nowa def pędu:

$$p = m_0\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma = \gamma\, m_0 v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v = mv$$

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = m\,\vec{v}$$

- **Masa relatywistyczna** m cząstki rośnie z jej prędkością: dla $v \rightarrow 0$; $m \rightarrow m_0$, m_0 – **masa spoczynkowa**

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}$$



$m \rightarrow \infty, gdy\ v \rightarrow c$

Energia relatywistyczna

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$m^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = {m_0}^2$$

$$m^2c^2 = m^2v^2 + {m_0}^2c^2$$

$$\boxed{\boldsymbol{E^2 - (pc)^2 = {m_0}^2c^4}}$$

niezmiennik relatywistyczny

$$\boxed{\boldsymbol{m^2c^4 = (pc)^2 + {m_0}^2c^4}}$$

?

$(\gamma\, m_0c^2)^2$

energia spoczynkowa

energia kinetyczna

energia CAŁKOWITA

$$\boxed{\boldsymbol{E = mc^2}}$$

Całkowita energia ciała jest równa iloczynowi jego masy relatywistycznej i kwadratu prędkości światła w próżni

Energie relatywistycznie

- Energia spoczynkowa: $\boldsymbol{E_0 = m_0c^2}$

  jest to całkowita energia ciała spoczywającego

- Całkowita energia: $\boldsymbol{E = mc^2 = \gamma m_0 c^2}$

? $$\boldsymbol{\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Rozwinięcie: $(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \cdots$

mamy: $x = -\frac{v^2}{c^2}$, $q = -\frac{1}{2}$, czyli:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots$$

zatem:

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma m_0 c^2 = m_0 c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) \cong m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2}}$$

A.Obłąkowska-Mucha

Energia kinetyczna

$$\boxed{\boldsymbol{\gamma m_0 c^2} = \boldsymbol{m_0 c^2} + \boldsymbol{\frac{1}{2} m_0 v^2}}$$

energia całkowita

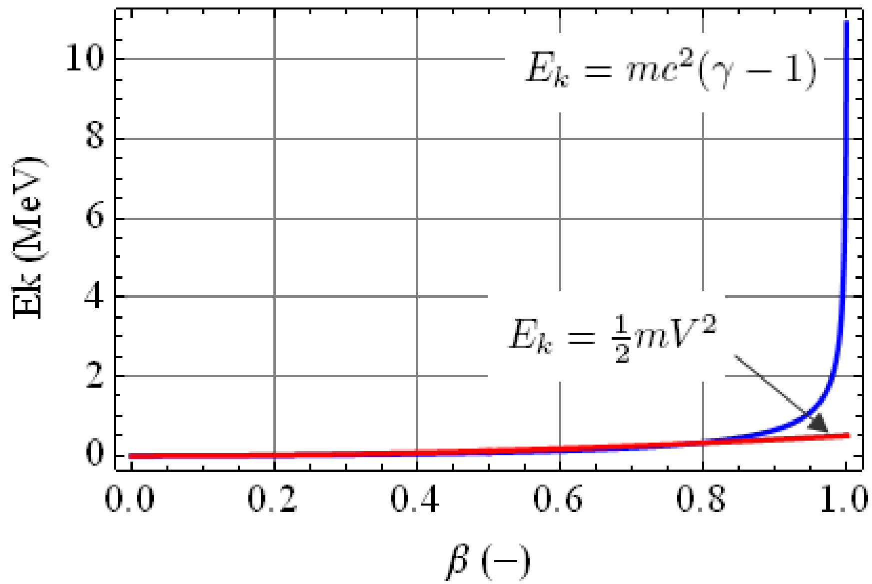
spoczynkowa

kinetyczna

$$E_k = E - m_0 c^2$$

Relatywistyczna energia kinetyczna:

$$\boldsymbol{E_k = mc^2(\gamma - 1)}$$



$$E_K \to \infty, gdy\ v \to c$$

co oznacza, że ciało o niezerowej masie spoczynkowej, porusza się z $v < c$

Czterowektory

- Jak mierzyć energię i pęd w różnych układach?

Udało się pokazać, że istnieje pewna wartość niezależna od wyboru układu:

$$\boldsymbol{m_0{}^2c^4 = E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2}$$

Transformacja energii i pędu:

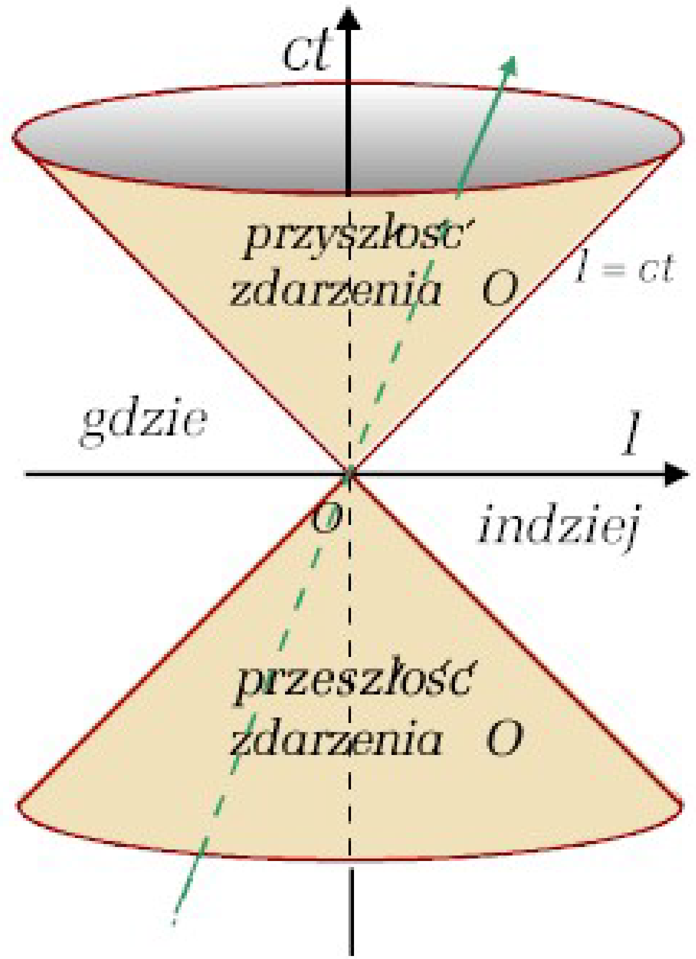
$$\begin{cases} p_x{}' = \gamma\left(p_x - \dfrac{\beta E}{c}\right) \\ E' = \gamma(E - px\ c\beta) \end{cases}$$

$\boldsymbol{(ct, \vec{r})}$ oraz $\boldsymbol{(E/c, \vec{p})}$ są to

CZTEROWEKTORY

Przestrzeń i czas nie są niezależne – tworzą **czasoprzestrzeń**.
Również energia i pęd – tworzą **czteropęd**

Interwał czasoprzestrzenny



$$c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = l^2$$

odległość pomiędzy dwoma zdarzenieami w czasoprzestrzeni- **interwał czasoprzestrzenny** (jest taki sam we wszystkich układach)

Równoważność masy i energii

- Możliwość przemiany masy spoczynkowej w energię – najważniejszy wynik teorii względności!

$$E = m_0 c^2$$

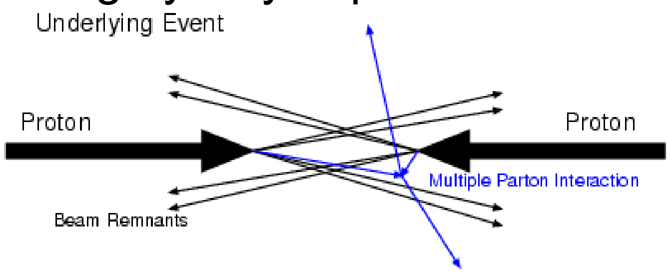
$$\boldsymbol{\Delta E = \Delta m_0 c^2}$$

- Zamiana energii w masę:
  - przy małych prędkościach – zderzamy niesprężyście dwie masy 1g o prędkościach 10^3 m/s:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \sim 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 \approx 10^{-11}\ g$$

  - produkcja cząstek w zderzeniach wysokoenergetycznych protonów:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \gg 0$$



  - produkcja energii z rozszczepienia jądra:

$$\Delta E = c^2 (M - m_1 - m_2) > 0$$

Relatywistyka w życiu

- Eksperymenty myślowe: paradoks bliźniąt

  w układach poruszających się czas biegnie wolniej –

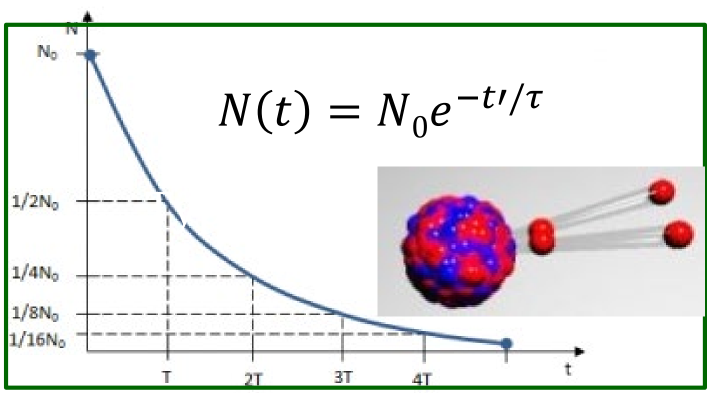
  - zegar pozostający w spoczynku w układzie U wskazuje czas własny t, mierzony przez obserwatora w spoczynku w tym układzie U.
  - identyczny zegar w układzie U', również wskazuje t, bo pozostaje w tym układzie w spoczynku.
  - ale! Jeżeli mierzymy w układzie U' przedział czasu, który w ukł. U wynosił t, to otrzymujemy czas dłuższy t'
  - no i: Jeżeli mierzymy w układzie U przedział czasu, który w ukł. U' wynosił t, to otrzymujemy czas dłuży t'
  - Paradoks?

  Rozumowanie: mamy dwóch braci bliźniaków (siostry bliźniaczki?), jeden jest astronomem i leci w kosmos, drugi zostaje na Ziemi. Astronom leci na układ □Centaura (4,3 lat świetlnych od Ziemi).

  - Który z bliźniaków (wysłany w rakiecie, czy pozostajacy na Ziemi) będzie młodszy?

Paradoks bliźniąt i rozpady

- Który z bliźniaków jest młodszy? Każdy sądzi, że to ten drugi jest młodszy, bo był w poruszającym się układzie.
  - Ale astronauta musi wrócić na Ziemię, zmienia układ inercjalny (widzi inne gwiazdy, czuje działanie siły bezwładności, bo zmienia v na –v), powstaje asymetria – no i jednak to astronauta jest młodszy!
- Lepsze, bo mierzalne i potwierdzone doświadczalnie jest rozumowanie dotyczące rozpadów promieniotwórczych.



$0.9\,c$

porównujemy liczbę jąder, które się nie rozpadły w dwóch układach:

$$\frac{N_0 e^{-t\prime/\tau}}{N_0 e^{-t/\tau}} = e^{(t-t')/\tau} = e^{(\gamma\, t\prime - t\prime)/\tau} =$$

$$= e^{t'(\gamma-1)/\tau} > 1, \qquad \text{bo } \gamma > 1$$

W poruszajacej się rakiecie zostanie więcej jąder, które się nie rozpadły

Efekty relatywistyczne w życiu

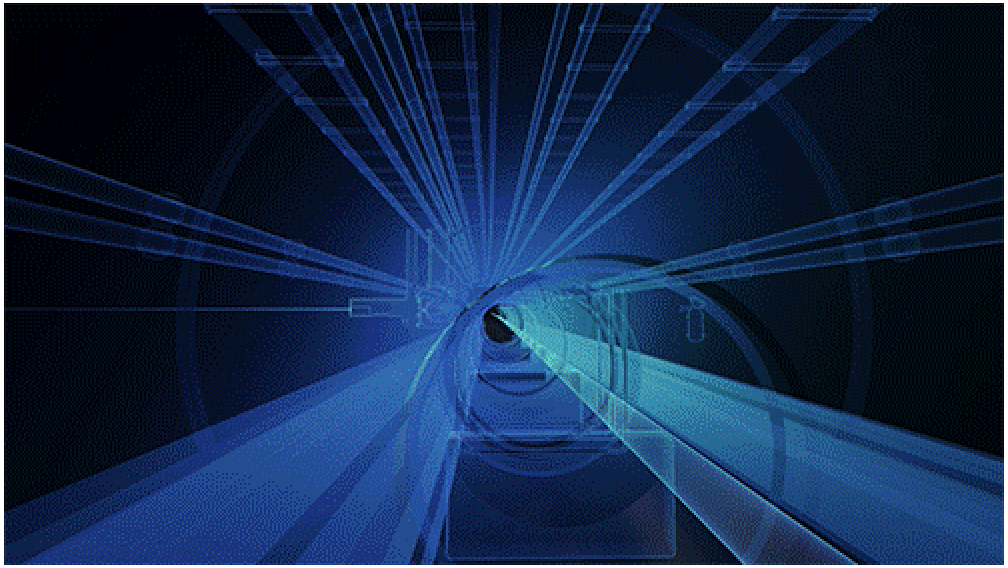
- Zderzenia wysokoenergetycznych cząstek (np. LHC w CERnie) – za chwilę więcej!
- Poprawki zegarów atomowych: jeden zegar odbywa podróż w ponaddźwiękowym samolocie, drugi zostaje na Ziemi. Poruszający się zegar spóźniał o kilkanaście ns.
- Poprawki relatywistyczne GPS – zegary umieszczone na satelitach chodzą wolniej niż zegary na Ziemi

http://www.if.pwr.wroc.pl/~wsalejda/
GPS

Podsumowanie

- Przesłanki prowadzące do szczególnej teorii względności
  - hipoteza eteru,
  - dośw. Michaelsona-Morleya
  - równania Maxwella
- Postulaty Einstaina
- Konsekwencje – dylatacja czasu, skrócenie długości.
- Czterowektory,
- Energia relatywistyczna, spoczynkowa
- Mierzalne efekty relatywistyczne

Moja fizyka



[How Does the Large Hadron Collider Work?]