

# Podstawy fizyki 2

## **Mechanika płynów**

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

AGH,WFiIS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,  
D11, pok. 106  
amucha@agh.edu.pl  
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

# Cele wykładu (pytania egzaminacyjne)

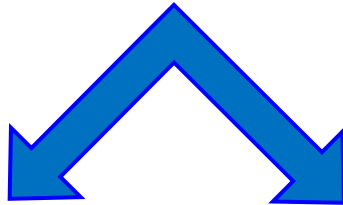
## Wiedza:

- ▶ Czym różnią się płyny od bryły sztywnej?
- ▶ Co to jest ciśnienie, od czego zależy i jak je zmierzyć?
- ▶ Prawo Pascala, Archimedesesa i Bernoulliego.
- ▶ Skąd się biorą turbulencje?

## Umiejętności:

- ▶ Wyznaczenie ciśnienia w wodzie i na wysokości w atmosferze Ziemskiej.
- ▶ Pokazanie związku prawa Bernoulliego z siłą nośną samolotu oraz w domu i zagrodzie.
- ▶ Zastosowanie prawa Pascala i Archimedesesa.

# Mechanika płynów



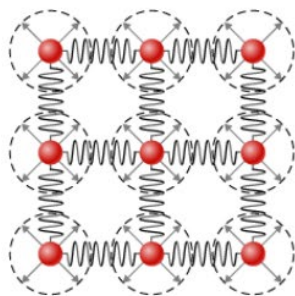
**Hydrostatyka**

**Hydrodynamika**

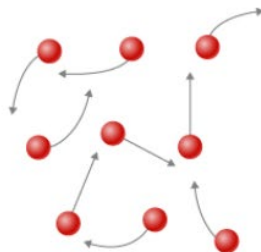
**PŁYNY = CIECZE + GAZY**

- ▶ Opis jest różny od mechaniki bryły sztywnej (zmiana kształtu, ścisłość)
- ▶ W płynach brak regularnego uporządkowania atomów i cząsteczek (jak w sieci krystalicznej ciał stałych).
- ▶ Płyn – substancja zdolna do przepływu, przyjmuje kształt naczynia, w którym się znajduje,
- ▶ Na płyny działają tylko siły prostopadłe do ich powierzchni. Powierzchnia ustawia się zawsze normalnie do siły zewnętrznej (dośw)
- ▶ Zamiast wyznaczać masę i siłę, opisujemy **gęstość i ciśnienie**

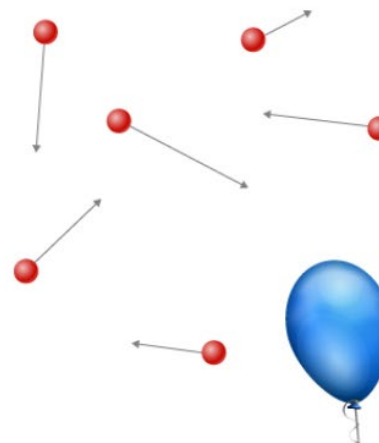
# Uporządkowanie atomów



Ciała stałe



Ciecze



Gazy

**Gęstość** to masa przypadająca na jednostkę objętości:  $\rho = \frac{m}{V} \left[ \frac{g}{cm^3} \right]$

<https://openstax.org/books/fizyka>

# Gęstość

**Gęstość** to masa przypadająca na jednostkę objętości:  $\rho = \frac{m}{V} \left[ \frac{g}{cm^3} \right]$

Ciała stałe (0.0 °C)		Ciecze (0.0 °C)		Gazy (0.0 °C, 101.3 kPa)	
Substancja	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Substancja	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Substancja	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Aluminium	$2,70 \cdot 10^3$	Benzen	$8,79 \cdot 10^2$	Powietrze	$1,29 \cdot 10^0$
Kość	$1,90 \cdot 10^3$	Krew	$1,05 \cdot 10^3$	Dwutlenek węgla	$1,98 \cdot 10^0$
Mosiądz	$8,44 \cdot 10^3$	Alkohol etylowy	$8,06 \cdot 10^2$	Tlenek węgla	$1,25 \cdot 10^0$
Beton	$2,40 \cdot 10^3$	Benzyna	$6,80 \cdot 10^2$	Hel	$1,80 \cdot 10^{-1}$

Substancja	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
Lód (0 °C)	$9,170 \cdot 10^2$
Woda (0 °C)	$9,998 \cdot 10^2$
Woda (4 °C)	$1,000 \cdot 10^3$
Woda (20 °C)	$9,982 \cdot 10^2$
Woda (100 °C)	$9,584 \cdot 10^2$
Para (100 °C, 101.3 kPa)	$1,670 \cdot 10^2$
Woda morska (0 °C)	$1,030 \cdot 10^3$

Gęstość gazów bardzo zależne od temperatury i ciśnienia!

# Ciśnienie

- ▶ **Ciśnienie** – wartość siły prostopadłej na jednostkę powierzchni:

$$p = \frac{F_{\perp}}{S} \quad \left[ \frac{N}{m^2} = 1 Pa \right]$$

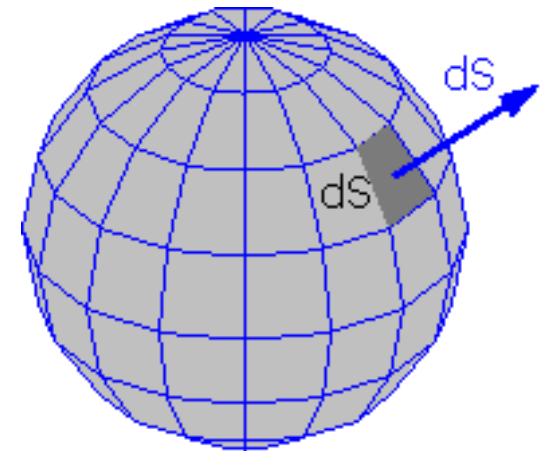
$$10^5 Pa = 1 bar ; \quad 1 atm = 1013,25 hPa = 760 mmHg$$

- ▶ **Wektor powierzchni**- długość wektora  $\vec{dS}$  jest równa polu powierzchni  $dS$ , jego kierunek jest **prostopadły** do powierzchni, a zwrot na zewnątrz powierzchni.

- ▶ Siła wywierana przez płyn na tę powierzchnię:

$$\vec{dF} = p \vec{dS}$$

- ▶ **Gęstość** -  $\rho = \frac{dm}{dV}$  - zależy od temperatury, ciśnienia



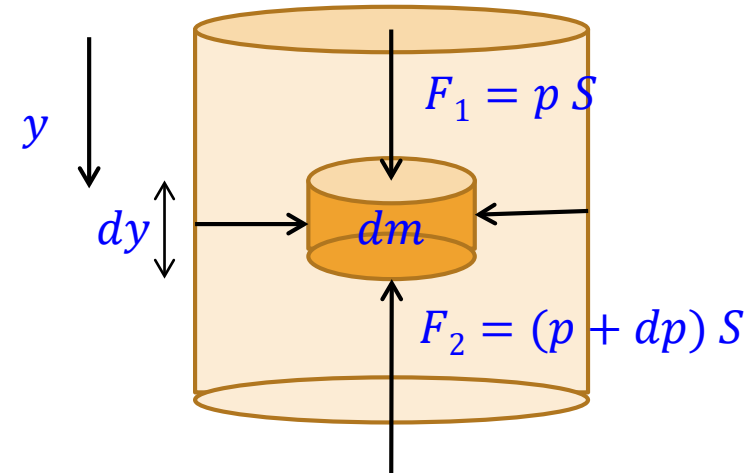
# Ciśnienie wewnątrz płynu (hydrostatyka)

- ▶ Ciśnienie wywierane przez płyn **WEWNĄTRZ** naczynia:

na górną i dolną powierzchnię cienkiego walca, o wysokości  $dy$ , znajdującego się na głębokości  $y$ , działają siły:

$$F_1 = p S, \quad F_2 = (p + dp) S$$

$$dp = \frac{dm g}{S} = \frac{\rho S dy g}{S} = \rho g dy$$



zmiana ciśnienia w zależności od zmiany głębokości

- ▶ Ciśnienie hydrostatyczne cieczy na głębokości  $y$  (całkujemy powyższe):

$$p = p_0 \pm \rho g y$$

ciśnienie atmosferyczne

$$\frac{dp}{dy} = \rho g$$

ciężar właściwy cieczy

# Ciśnienie

- ▶  $p = p_0 \pm \rho g y$ 
  - ▶ ciśnienie rośnie wraz z głębokością i zależy tylko od głębokości liczonej od powierzchni, niezależnie od kształtu pojemnika (nurek),
  - ▶ ciśnienie maleje z wysokością (treking),
  - ▶ ciśnienie jest jednakowe dla punktów na tej samej głębokości, nie zależy od kształtu naczynia (paradoks hydrostatyczny).
- ▶ Ciśnienie pod wodą – po każdym zanurzeniu o 10 m ciśnienie zwiększa się o 1 atm.

$$p = p_0 + \rho g h$$

$$p = 1013 \text{ hPa} + \left(998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (10\text{m}) \approx 1 \text{ atm} + 1 \text{ atm}$$

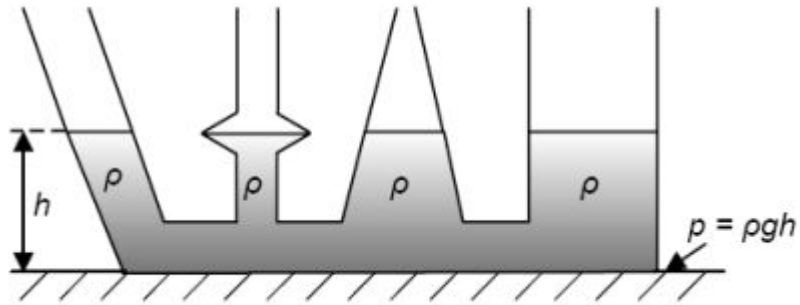
Rekord nurkowania swobodnego (free-diving) to ponad 300m !

- ▶ Łodzie podwodne 200-400m

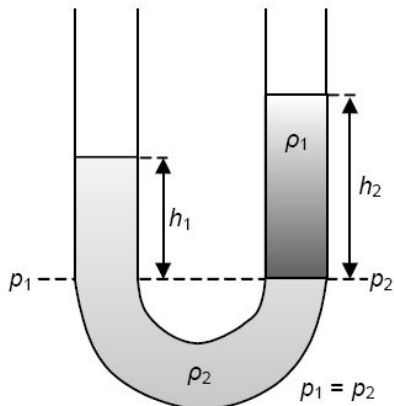




# Ciśnienie - przykłady



płyn może się przemieszczać pomiędzy częściami pojemnika - ciśnienie na dole każdej kolumny jest takie samo



ciśnienie na każdym poziomie jest takie samo:

$$p_0 + \rho_1 h_1 g = p_0 + \rho_2 h_2 g$$

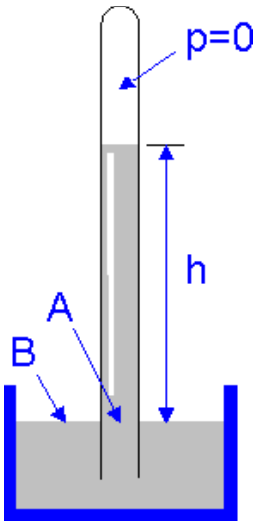
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$$



# Pomiar ciśnienia

- Do pomiaru ciśnienia – barometr

Barometr Torricellego (1643) – pomiar ciśnienia atmosferycznego za pomocą rurki z rtęcią



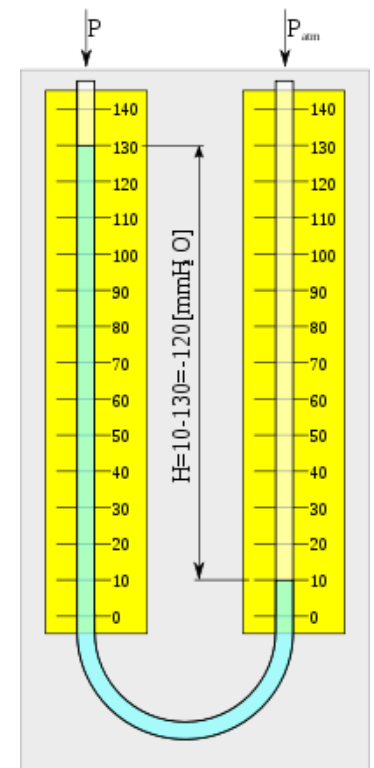
$$p_A = \rho g h \quad p_B = p_{atm}$$

$$p_A = p_B$$

$$p_{atm} = \rho g h$$



Współcześnie:



# Barometry, manometry

- ▶ Ze względu na rodzaj pomiaru barometry można podzielić na:
  - bezwzględne – wskazują ciśnienie absolutne, czyli w odniesieniu do próżni,
  - różnicowe – wskazują różnicę ciśnień,
  - względne (manometry) – wskazują ciśnienie względem ciśnienia otoczenia (względne) i większe od niego,

- ▶ Manometry:

- hydrostatyczne,
- sprężynowe,
- elektryczne

- ▶ Próżniomierze

próżniomierz



# Jednostki ciśnienia

$$1 \text{ Pa [N/m}^2\text{]} = 10^{-5} \text{ bar} = 10^{-2} \text{ mbar}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa (hekto – paskali)}$$

$$1 \text{ at (techniczna)} = 98066 \text{ Pa} = 980 \text{ hPa} = 0.98 \text{ bar}$$

$$1 \text{ atm (fizyczna)} = 1013250 \text{ Pa} = 1013,25 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ hPa} = 1 \text{ mbar}$$

Ciśnienie atmosferyczne na Ziemi na poziomie morza

$$1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ Tor} = 133,3 \text{ Pa} = 1,33 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ psi} = 6897 \text{ Pa}$$

funty/cal<sup>2</sup>



# Jednostki ciśnienia

$$1 \text{ Pa [N/m}^2\text{]} = 10^{-5} \text{ bar} = 10^{-2} \text{ mbar}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa (hekto – paskali)}$$

$$1 \text{ at (techniczna)} = 98066 \text{ Pa} = 980 \text{ hPa} = 0.98 \text{ bar}$$

$$1 \text{ atm (fizyczna)} = 1013250 \text{ Pa} = 1013,25 \text{ hPa}$$

**Ciśnienie atmosferyczne** na Ziemi na poziomie morza

$$1 \text{ mm Hg} = 1 \text{ Tor} = 133,3 \text{ Pa} = 1,33 \text{ hPa}$$

$$1 \text{ psi} = 6897 \text{ Pa}$$

manometr techniczny



manometr nurkowy



# Ciśnienie

opona samochodowa



***1 bar = 100 kPa***

opona rowerowa



# Ciśnienie atmosferyczne

**Ciśnienie atmosferyczne** – stosunek wartości siły z jaką słup powietrza atmosferycznego naciska na powierzchnię Ziemi (lub innej planety), do powierzchni, na jaką ten słup naciska.  
Zatem w górach ciśnienie atmosferyczne jest niższe niż na nizinach.

- Ciśnienie atmosferyczne na wysokości H:

$$p = p_0 - \rho_{pow} g H \quad \text{ale:} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

co daje:

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} p$$

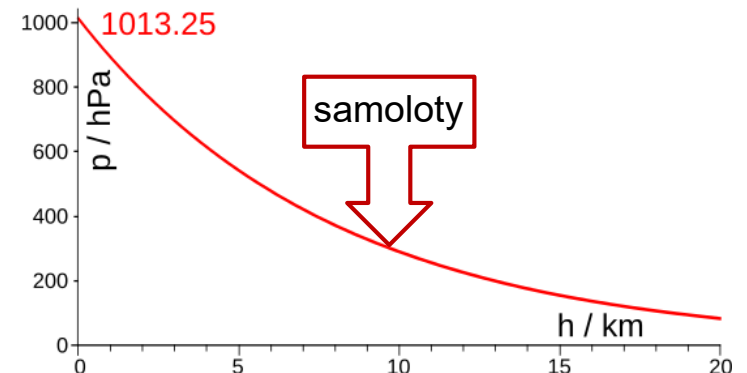
$$p = p_0 e^{-g \frac{\rho_0}{p_0} h}$$

wzór barometryczny

rozwiązać lub sprawdzić!

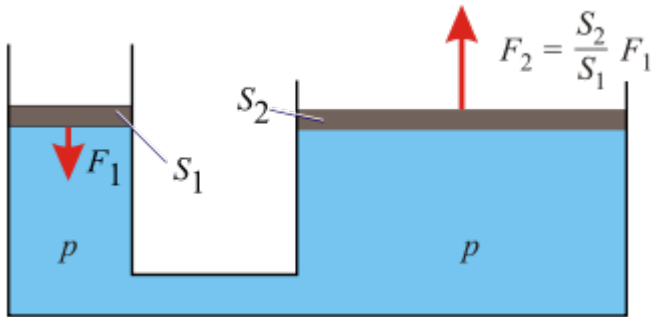


4000 m 2700 m 300 m

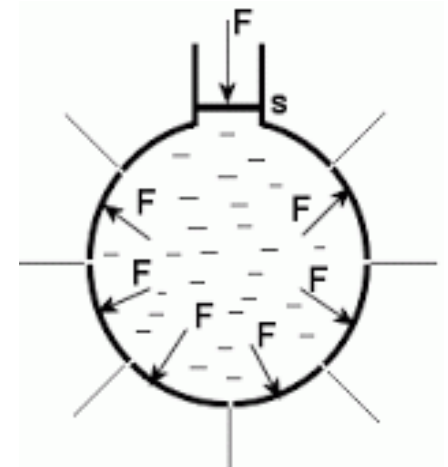
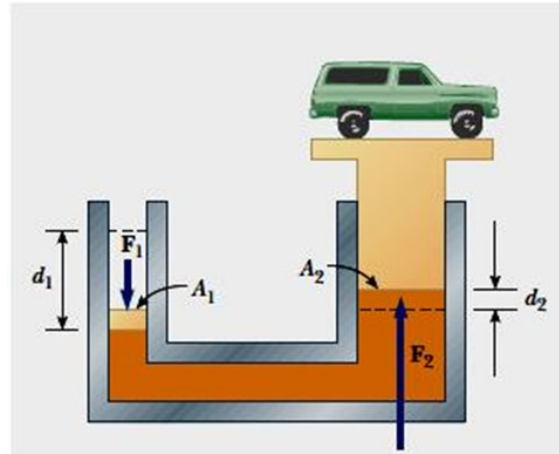


# Prawo Pascala

- ▶ W zamkniętej objętości płynu (nieściśliwego) zmiana ciśnienia jest przenoszona do każdego miejsca w płynie i do ścian zbiornika (prasa hydrauliczna, hamulce, ciśnienie w oponie jest w każdym miejscu jednakowe, itp.)



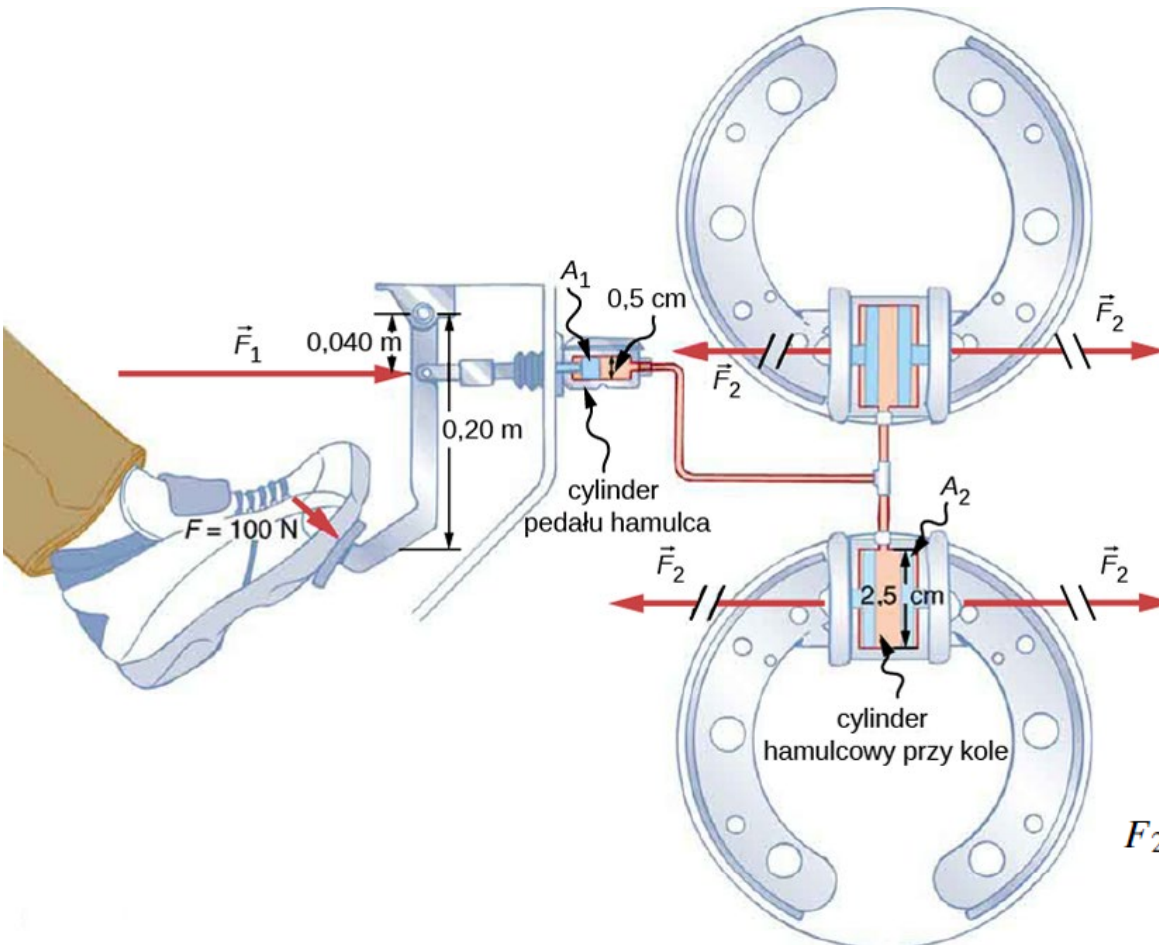
$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$



- Można działać mniejszą siłą w celu podniesienia większego ciężaru (kosztem drogi).
- Przyrost ciśnienia jest w każdym miejscu taki sam, niezależny od głębokości



# Prawo Pascala - przykłady



$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} F_1$$
$$= \frac{(1,25 \text{ cm})^2}{(0,250 \text{ cm})^2} \cdot 500 \text{ N} = 1.25 \cdot 10^4 \text{ N}$$

# Prawo Archimedesesa

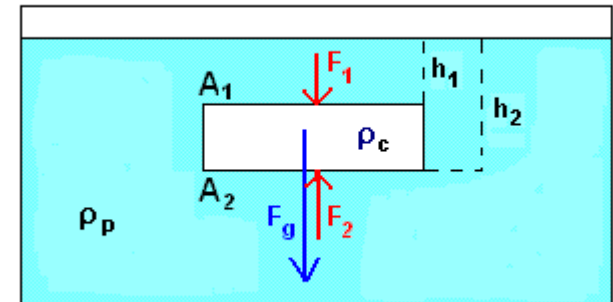
- ▶ Na ciało zanurzone w cieczy działa siła grawitacyjna – gdy ciało się nie porusza musi ona być zrównoważona przez inną siłę – zwaną **siłą wyporu**
- ▶ Siła wyporu wynika z **różnicy ciśnień** działających na górną i dolną powierzchnię ciała.

$$p(h) = p_0 - \rho g h$$

$$F_w = p(h_2)A_2 - p(h_1)A_1$$

$$F_w = \rho g (h_2 - h_1)A$$

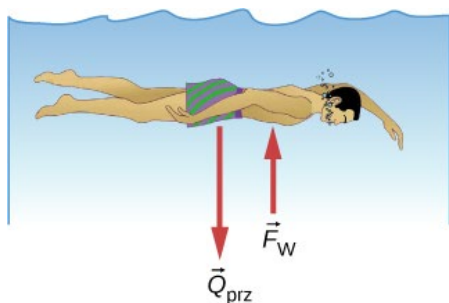
$$F_w = \rho g V$$



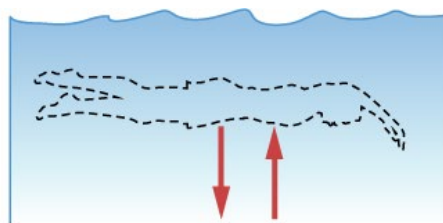
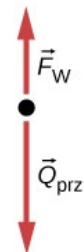
**PRAWO ARCHIMEDESA:** na ciało zanurzone w płynie działa siła wyporu, skierowana pionowo do góry, a jej wartość jest równa ciężarowi wypartej przez ciało cieczy.

# Prawo Archimedesesa

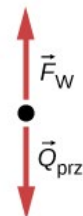
**PRAWO ARCHIMEDESA:** na ciało zanurzone w płynie działa siła wyporu, skierowana pionowo do góry, a jej wartość jest równa ciężarowi wypartej przez ciało cieczy.



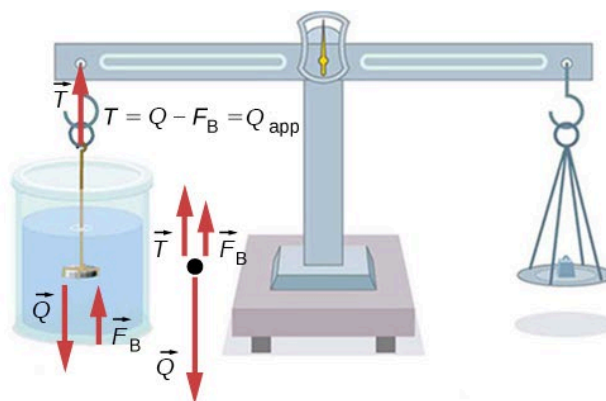
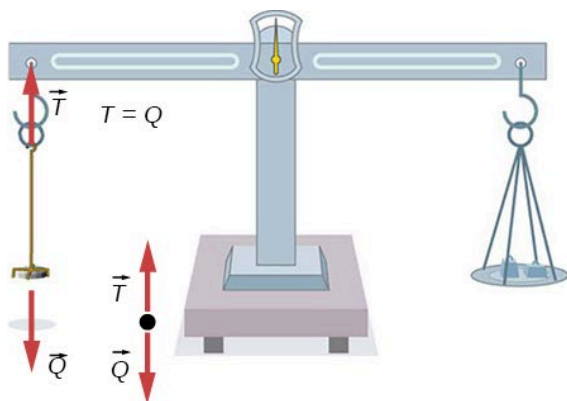
obiekt zanurza się



obiekt swobodnie unosi się



$$F_w = \rho g V$$



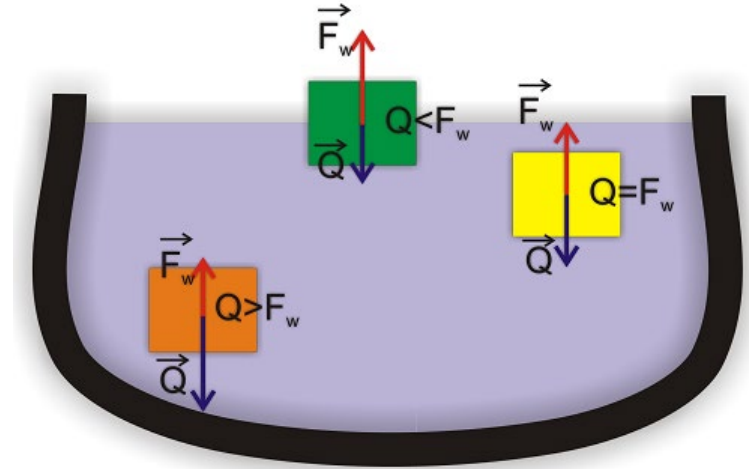
# Pływanie ciał

- ▶ Warunki pływania- gdy ciało pływa, wartość działającej na nie siły wyporu  $F_w$  jest równa wartości działającej na nie siły ciężkości.

$$F_w = mg$$

$$\rho_{\text{płynu}} V_{\text{ciała}} g = \rho_{\text{ciała}} V_{\text{ciała}} g$$

$$\rho_{\text{płynu}} = \rho_{\text{ciała}}$$



- ▶ Statki powinny wypierać ciecz o ciężarze równym własnemu ciężarowi.

$$M_s g = \rho_w V g$$

zanurzenie jest proporcjonalne do  $V = \frac{M_s}{\rho_w}$ , czyli zależy od gęstości wody (temp, zasolenia)

# Pływanie ciał

Przykład: Jaka część objętości góry lodowej wystaje nad powierzchnię morza? Gęstość lodu wynosi  $920 \text{ kg/m}^3$  a gęstość wody morskiej  $1030 \text{ kg/m}^3$ .

$$Q_l = \rho_l V_l g \quad \text{Ciężar góry lodowej}$$

$$Q_w = \rho_w V_w g \quad \text{Ciężar objętości } V_w \text{ wypartej wody morskiej.}$$

$$\rho_l V_l g = \rho_w V_w g \quad \text{Warunek pływania.}$$

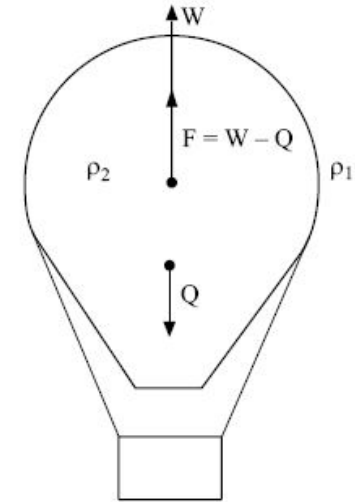
$$\frac{V_w}{V_l} = \frac{\rho_l}{\rho_w} = \frac{920}{1030} = 0.89$$

Objętość wypartej wody równa się objętości zanurzonej części góry lodowej, czyli 89% góry znajduje się pod wodą.

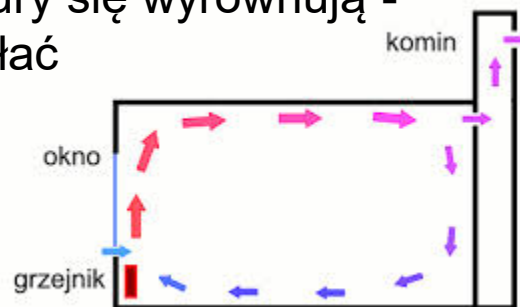


# Siła wyporu powietrza

- ▶ Na każde ciało znajdujące się w powietrzu przy powierzchni Ziemi działa siła wyporu równa ciężarowi wypartego powietrza. Ciało o objętości  $1\text{m}^3$  wypiera  $1\text{m}^3$  powietrza, którego ciężar jest około  $12\text{N}$  - każde ciało, ważone przy powierzchni Ziemi naciska na wagę siłą o ok.  $12\text{N}$  mniejszą od ich ciężaru (co waży więcej – tona puchu czy tona kamieni?) – poprawki na pomiar masy...



- ▶ Wentylacja grawitacyjna działa dzięki różnicy temperatury wewnątrz i na zewnątrz budynku - lżejsze, ciepłe powietrze płynie ku górze, a na jego miejsce napływa powietrze zimniejsze - cięższe. Latem temperatury się wyrównują - wentylacja przestaje działać



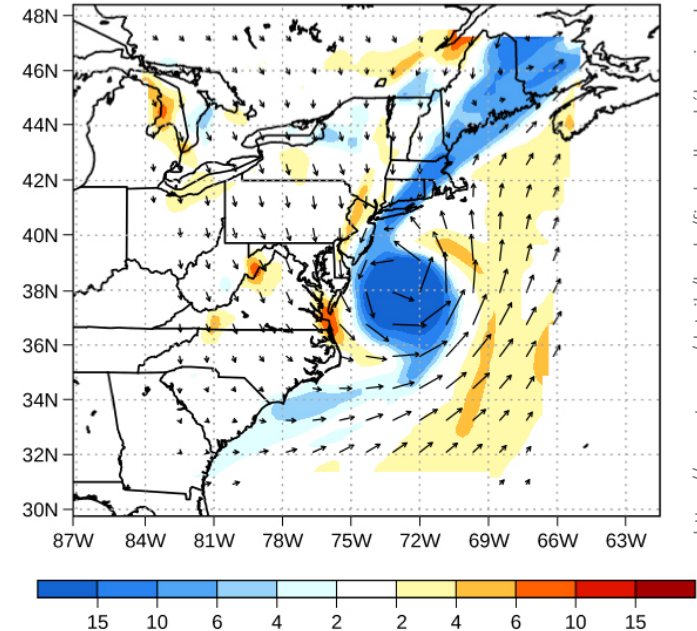
- ▶ Wypełnione gazem balony, które wznoszą się w powietrzu mają gęstość mniejszą niż powietrze.

# Dynamika płynów

Prędkość każdego punktu cieczy w funkcji czasu – pole wektorowe

- tor każdej cząstki to linia prądu
- prędkość jest styczna do linii prądu,
- struga – wiązka linii prądu

925 hPa wirowość wzgl., kier. wiatru, temp. na wys. 2 m  
prognoza na 19.04.2014 UTC



<https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkol-wyzszych-tom-1>

# Podział przepływów

- ▶ Podział przepływów:
  - **stacjonarny** (ustalony, **laminarny**) – prędkość płynu w dowolnie wybranym punkcie jest stała w czasie tzn. każda cząsteczka przechodząca przez dany punkt zachowuje się tak samo - niskie prędkości przepływu.
  - **bezwirowy** - w żadnym punkcie cząsteczka nie ma wypadkowej prędkości kątowej.
  - **nieściśliwy** - gęstość płynu jest stała, zazwyczaj w cieczech, w gazach tylko przybliżenia
  - **nielepki** – odpowiednik tarcia w ciałach stałych
  
- ▶ Dalsze rozważania dotyczą przepływów: **laminarnych, bezwirowych, nieściśliwych, nielepkich.**



# Równanie ciągłości strugi

- W takich przepływach wektory **prędkości są równoległe** do kierunku przepływu (**linii prądu**).
- Linie prądu się nie przecinają.
- Wszystkie cząstki cieczy przepływające przez dany punkt mają wtedy **ten sam wektor prędkości**.

Masy płynu przechodzące przez dwa przekroje  $S_1$  i  $S_2$  w tej samej jednostce czasu  $t$  są takie same:

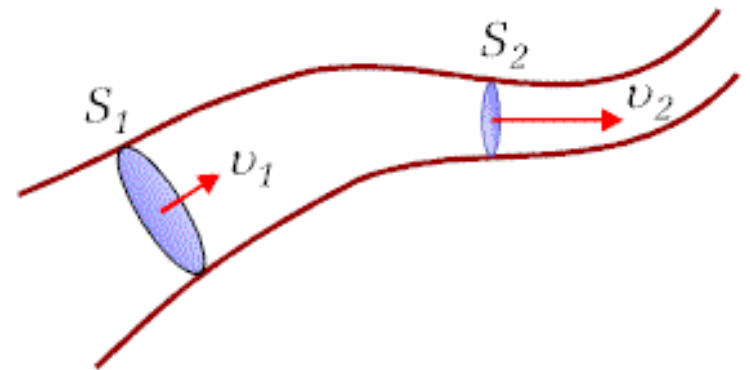
$$m_1 = \rho S_1 v_1 t \quad m_2 = \rho S_2 v_2 t$$

a zatem:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

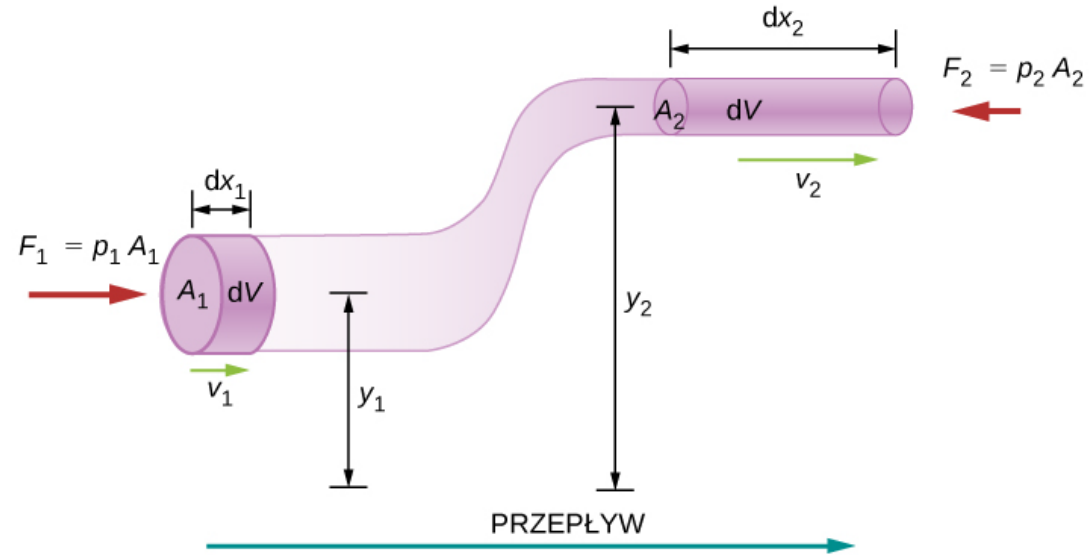
jest to **prawo ciągłości strugi**

Prędkość płynu nieściśliwego przy ustalonym przepływie jest odwrotnie proporcjonalna do pola przekroju strugi



# Prawo Bernoulliego

- ▶ Twierdzenie o pracy i energii – praca wykonana przez wypadkową siłę jest równa zmianie energii kinetycznej.
- ▶ Mamy siłę grawitacji i zmianę energii kinetycznej płynu.



Praca:

- wykonywana przez siłę ciężkości:

$$W_Q = -mg(y_2 - y_1) = -\rho V g(y_2 - y_1)$$

(siła i przemieszczenie mają przeciwne kierunki)

- wykonywana nad płynem:

$$W_p = -(F_2 - F_1)\Delta x = -(p_2 A_2 - p_1 A_1)\Delta x = -(p_2 - p_1)V$$

$$W = W_Q + W_p = -\rho V g(h_2 - h_1) - V(p_2 - p_1)$$

# Prawo Bernoulliego

Zmiana energii kinetycznej:  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$

jest równa pracy:

$$-\rho V g(h_2 - h_1) - V(p_2 - p_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

czyli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const}$$

ciśnienie hydrodynamiczne

energia mechaniczna dowolnego elementu płynu zmienia się w wyniku pracy wykonanej nad tym elementem przez płyn znajdujący się poza nim. Wykonanie tej pracy powodowane jest przez ciśnienie zmieniające się wzdłuż toru przepływu płynu.

## Prawo Bernoulliego

Dla nieściśliwego płynu bez tarcia, suma ciśnień statycznego i dynamicznego zachowana jest nie tylko w czasie, ale również wzdłuż linii prądu.

# Prawo Bernoulliego

- ▶ Jeśli ciecz płynie w rurze poziomej:

$$p + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{ciśnienie dynamiczne}} = \text{const}$$

↓  
ciśnienie statyczne

suma ciśnienia statycznego i dynamicznego jest stała (przykł.: **paradoks hydrostatyczny**)

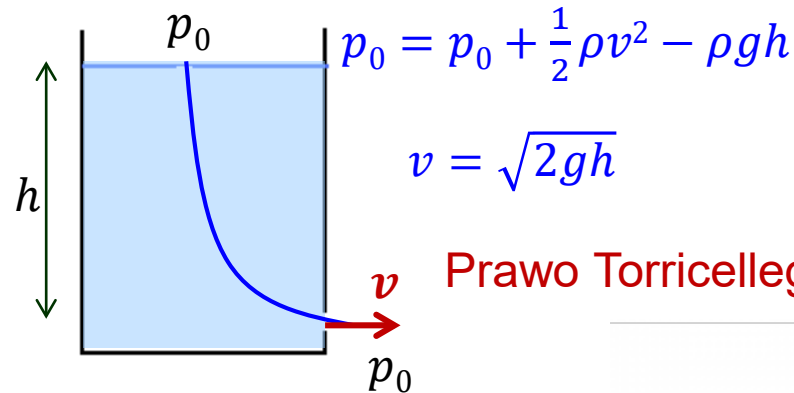
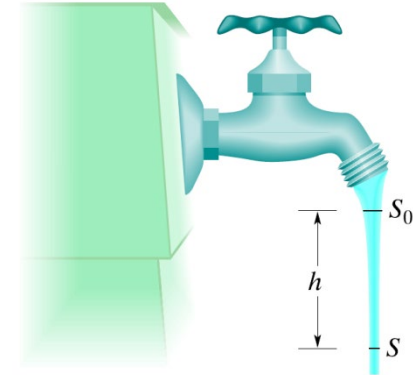
$Sv = \text{const}$ , czyli gdy przekrój jest mniejszy, to rośnie prędkość, a więc ciśnienie  $p$  maleje

Ciecz płynąc w rurze o zmieniającym się przekroju ma mniejsze ciśnienie na odcinku gdzie przekrój jest mniejszy.

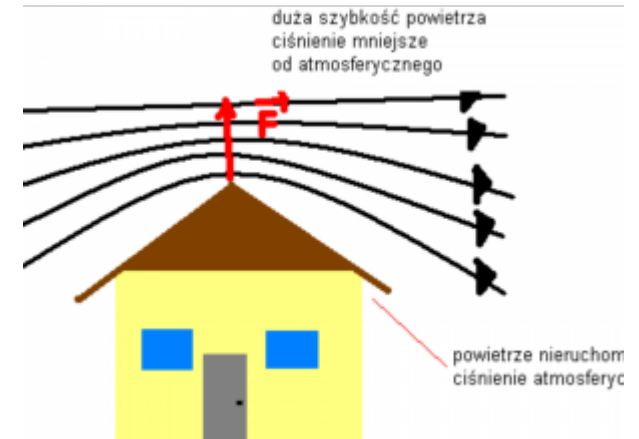
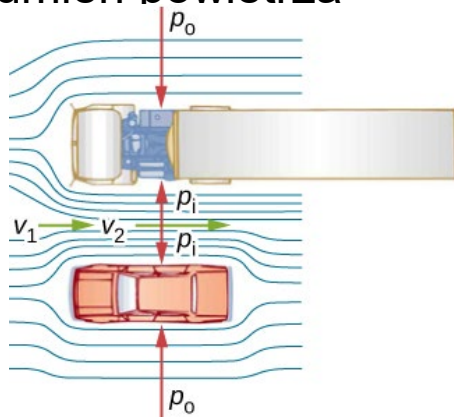
Prawo Bernoulliego ma zastosowanie do **plynu idealnego**, nieściśliwego – przepływu lamularnego, bez lepkości.

# Mechanika płynów w życiu

- ▶ Struga wody zwęża się, gdy wzrasta jest prędkość.
- ▶ Wąż ogrodowy – większa prędkość, gdy zmniejszymy otwór
- ▶ Wyptyw wody ze zbiornika:



- ▶ Rozpylacze.
- ▶ Strumień powietrza



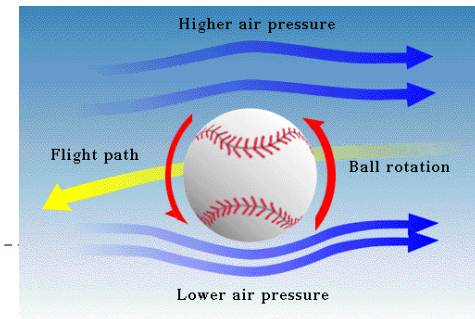
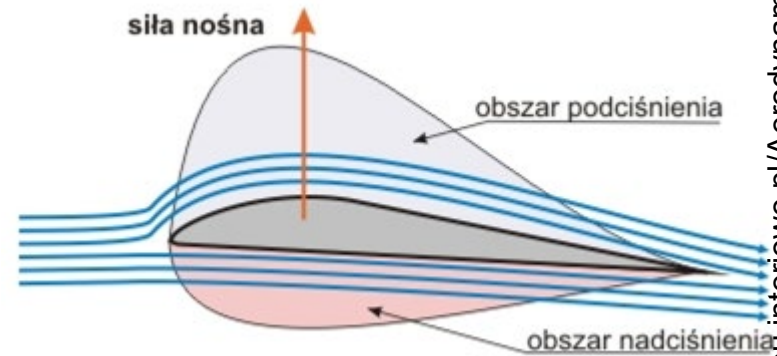
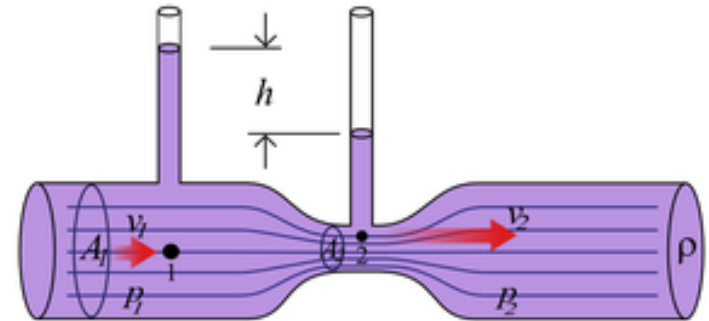
# Prawo Bernouliego w technice

- ▶ Ciśnienie jest najmniejsze tam, gdzie prędkość jest największa (nurkowanie)
- ▶ Siła nośna skrzydła samolotu: strugi powietrza są zagęszczone nad skrzydłem, a rozrzedzone – pod nim. Jak widać na rysunku, cząsteczki powietrza (lub cieczy) mając do przebycia większą drogę nad skrzydłem, mają tam większą szybkość niż pod skrzydłem
- ▶ Strzykawka



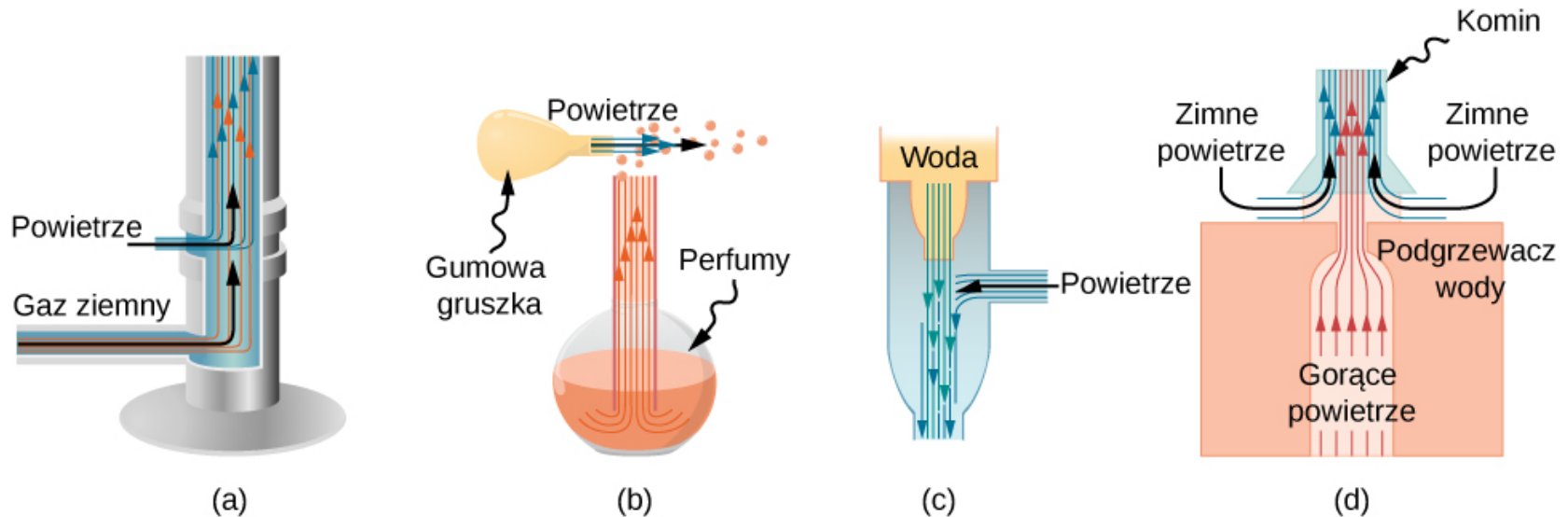
$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_0)}{\rho}}$$



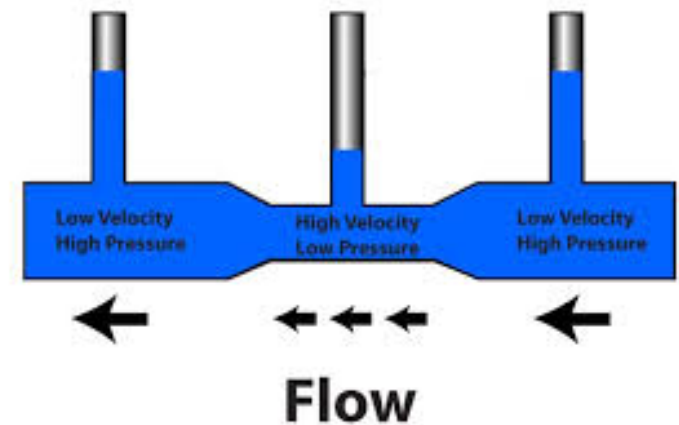
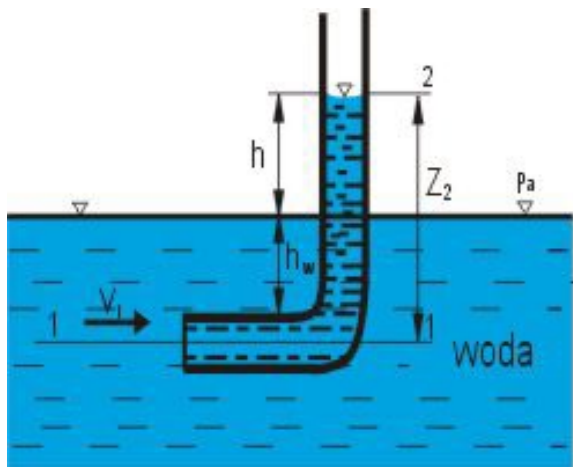
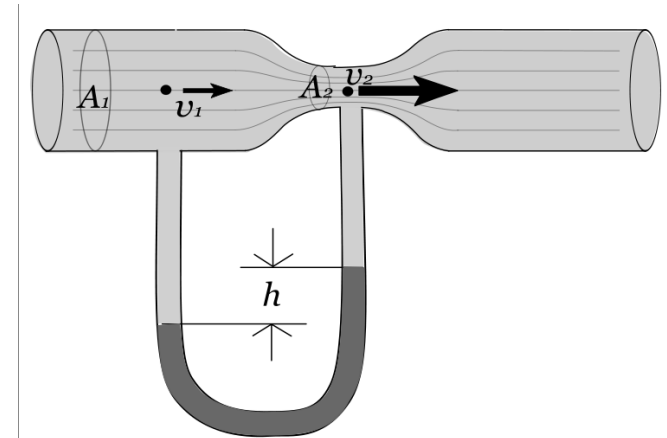
# Porywanie płynu

spadek ciśnienia w szybko poruszających się płynach wprawia materię w ruch



# Pomiar prędkości przepływu

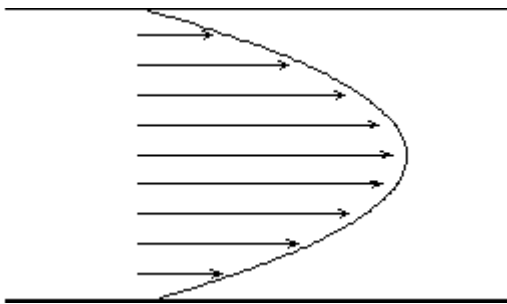
- ▶ Strumień objętościowy:  $Q = v S$
- ▶ Pomiar prędkości przepływu:
  - zwężka Venturiego,
  - rurka Prandla (rzeki)



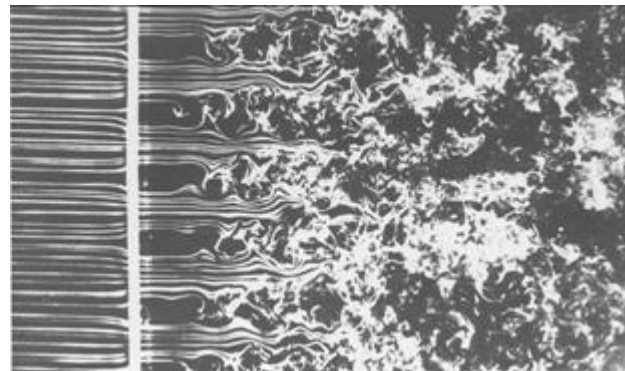


# Przepływy turbulentne

- ▶ Prędkość w przepływie lamilarnym:



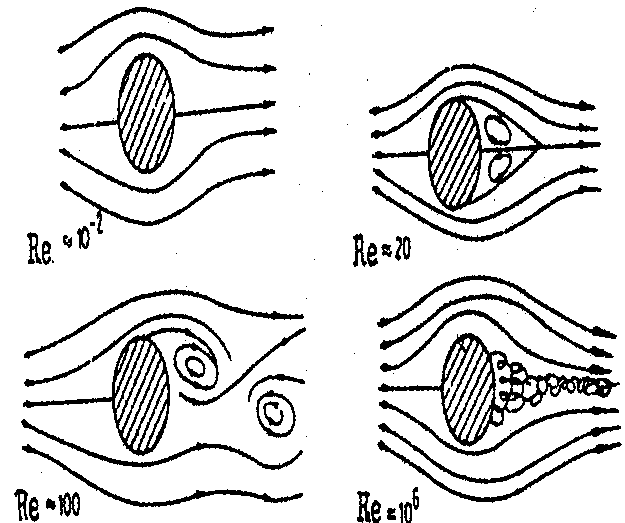
- ▶ Przepływ turbulentny



- ▶ Po przekroczeniu pewnej prędkości granicznej strumień zamienia się na wiry – przepływ turbulentny.

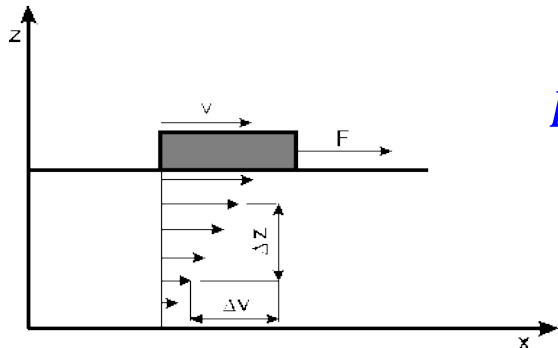
- ▶ Liczba Reynoldsa -  $Re = \frac{2 \bar{v} \rho}{\eta} \approx 2300$   
oznacza turbulencje

- ▶ Lepkość -  $\eta$

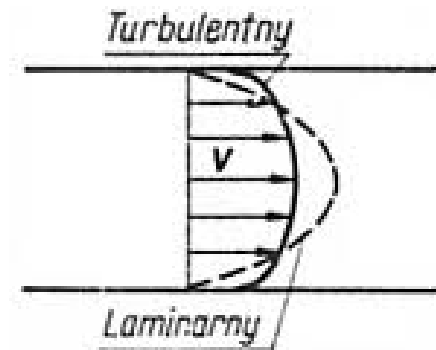


# Lepkość

- ▶ Lepkość – tarcie pomiędzy warstwami cieczy. Opisuje siły ścinania istniejące w poruszającej się cieczy
- ▶ W rurze prędkość jest największa w środku i maleje przy ściankach – ciecz składa się z małych walcowatych warstw, które poruszają się z różnymi prędkościami - tarcie
- ▶ Lepkość  $\eta$  – wartość siły  $F$ , jaką należy przyłożyć do ciała, aby poruszało się ze stałą prędkością  $v$ .



$$F = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S$$



- ▶ Związek lepkości z turbulencjami.

# Pokazy doświadczeń

---

- ▶ Demonstracja prawa Pascala.
- ▶ Paradoks hydrostatyczny
- ▶ Nurek Kartezjusza
- ▶ Ciśnienie dynamiczne w strudze cieczy-lewitująca piłeczka
- ▶ Paradoks aerodynamiczny
- ▶ Prawo Bernoulliego

# Podsumowanie

---

- ▶ Ciśnienie. Pomiar.
- ▶ Prawo ciągłości strugi Pascala, Archimedesesa. Przykłady.
- ▶ Równanie Bernoulliego. Opis zjawisk.
- ▶ Rodzaje przepływów.
- ▶ Turbulencje.
- ▶ Lepkość.
- ▶ Liczba Reynoldsa