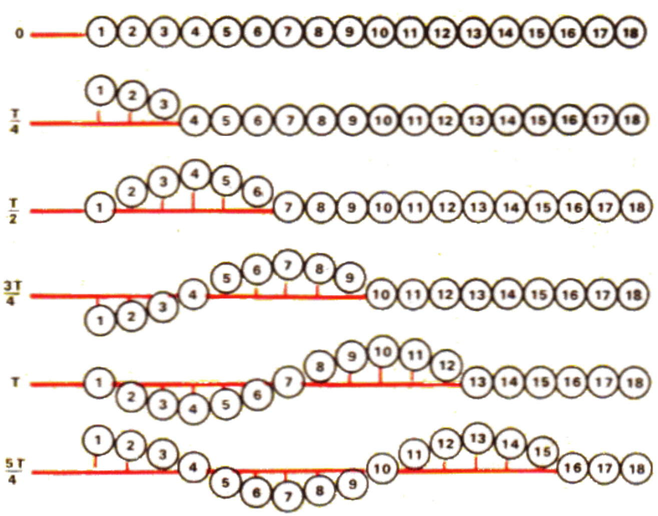
# Podstawy fizyki – sezon 1
# **VIII. Ruch falowy**

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
**http://home.agh.edu.pl/~amucha**

# Gdzie szukać fal?

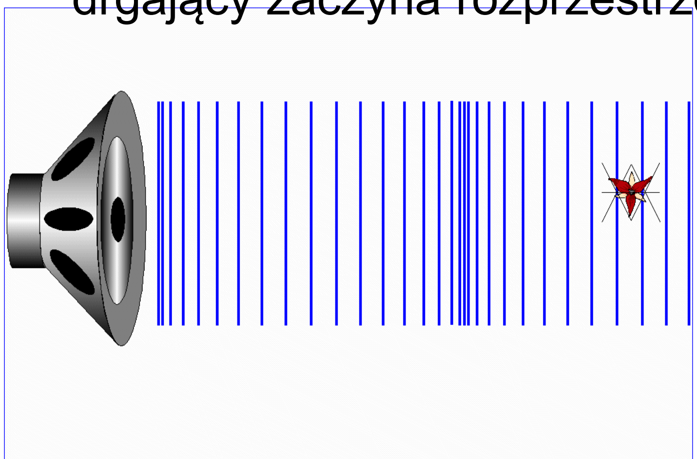
- W potocznym języku fale utożsamiamy ze zmianą kształu ośrodka, która przemieszcza się w przestrzeni (np. fale na wodzie, fala wytworzona na sznurze).
- Znamy również: fale radiowe, fale świetlne, fale dźwiękowe, fale na stadionie,…
- Każda z tych fal ma cechę wspólną – najpierw wytwarzane jest zaburzenie, a potem to zaburzenie się rozprzestrzenia (nawet na nieskończone odległości)
- Najbardziej ogólnie fale podzielić można na:
  - **mechaniczne** - rozchodzące się zaburzenie w **ośrodku** wykazującym cechy sprężystości (np. powietrze, woda, metal)
  - **elektromagnetyczne**- rozchodzące się w **próżni** zaburzenie pól – elektrycznego i magnetycznego
  - fale materii



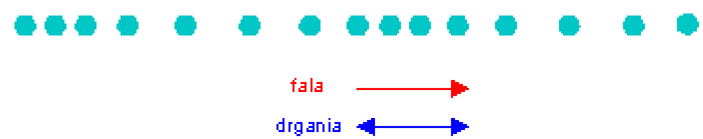
Wyjaśnienie mechanizmu powstawania fali

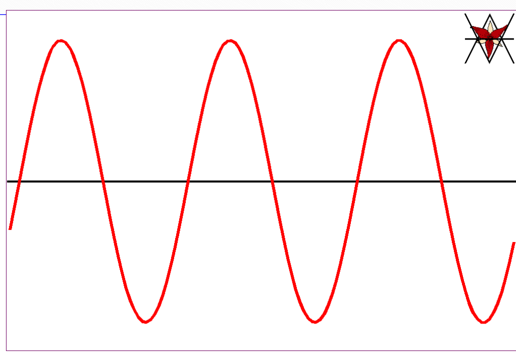
# Fale mechaniczne

- Jeżeli pewien obszar ośrodka sprężystego pobudzimy do drgań, to takie drganie zostanie przekazane innym cząstkom tego ośrodka i wtedy ruch drgający zaczyna rozprzestrzeniać się w postaci fali.

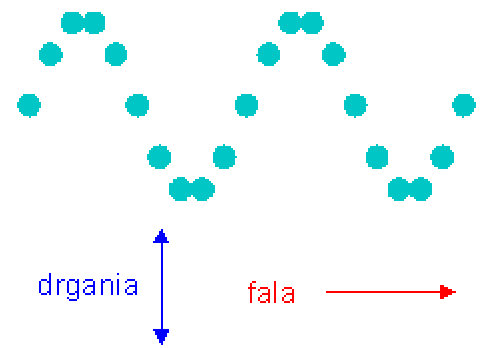


fala podłużna



fala poprzeczna



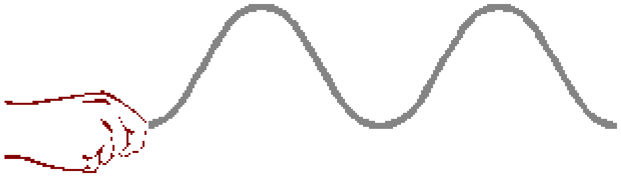

http://www.ftj.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/

http://www.if.pw.edu.pl/~bibliot/archiwum/adamczyk/WykLadyFO/FoWWW_16.html

# Fale – sposób wytworzenia

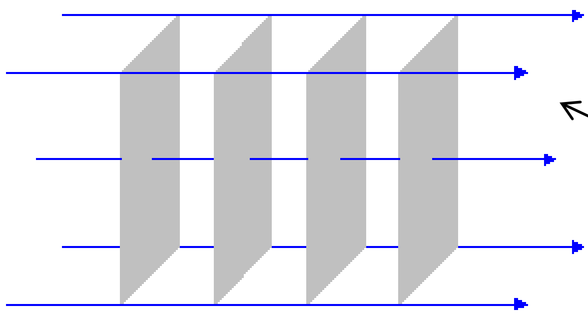
- Impuls falowy – jednorazowe zaburzenie, np. kamyk do wody

- Fala harmoniczna - źródło wykonuje drgania harmoniczne – wychylenie sznura

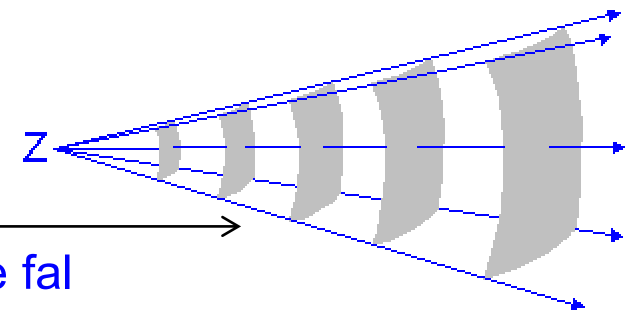


Czoło fali (powierzchnie falowe) – punkty, do których w tym samym momencie dotarła fala

- Fala płaska – równoległe płaszczyzny



- Fala kulista – wycinki sfer




promienie fal

Z.Kąkol

# Równanie falowe – zależność czasowa

- Do opisu zaburzenia rozchodzącego się w przestrzeni potrzeba funkcji zmiennych przestrzennych i czasu: $\boldsymbol{u(x, y, x; t)}$.
- Pamiętamy, że drgania punktu są opisywane przez równanie różniczkowe:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

- Drgania mogą odbywać się również w dowolnym kierunku np. $u$, a $\omega = \frac{2\pi}{T}$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 u = 0$$

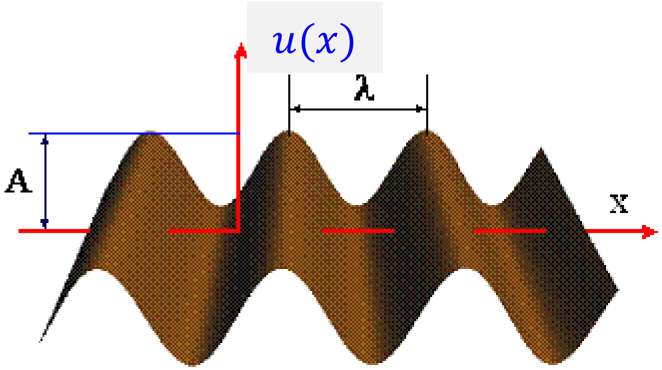
- Rozwiązaniem tego równania jest funkcja: $u(t) = A\, sin \frac{2\pi}{T}\, \mathrm{t}$

Jest to zależność powstałego drgania od czasu.

Potrzeba jeszcze zależności opisującej propagację tego drgania w przestrzeni.

# Równanie falowe

- Jeżeli teraz wyobrazimy sobie stałe w czasie zaburzenie np. pofałdowaną powierzchnię (jak blacha na dachu), to jej kształt również opisuje funkcja typu „sinus”, ale tym razem jest to fukcja niezależna od czasu, tylko w zmiennych przestrzennych: $u(x) = A\,sin\frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{x}$




- Funkcja ta jest rozwiązaniem, analogicznego do poprzedniego, równania:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 u = 0$$

Jeżli połączymy obydwa równania: $u = -\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{d^2u}{dt^2}$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \left(\frac{T}{\lambda}\right)^2 \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

gdy: $\frac{T}{\lambda} = \frac{T}{vT} = \frac{1}{v}$

to:

$$\boxed{\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d^2u}{dt^2} = 0}$$

**równanie falowe**

# Równanie falowe - interpretacja

- Rozwiązanie równania falowego w postaci: $u(x,t) = A\sin(kx - \omega t)\,, \frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\lambda}} = \mathrm{k}$ (k- wektor falowy) oznacza falę biegnącą w prawo (dodatni kierunek „x”):

- Rozwiązanie równania falowego w postaci: $u(x,t) = A\sin(kx + \omega t)\,,$ oznacza falę biegnącą w lewo (ujemne „x”):

- Równanie dla fali rozchodzącej się w przestrzeni:

**sprawdzić!**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$\boldsymbol{\partial}$- pochodna cząstkowa

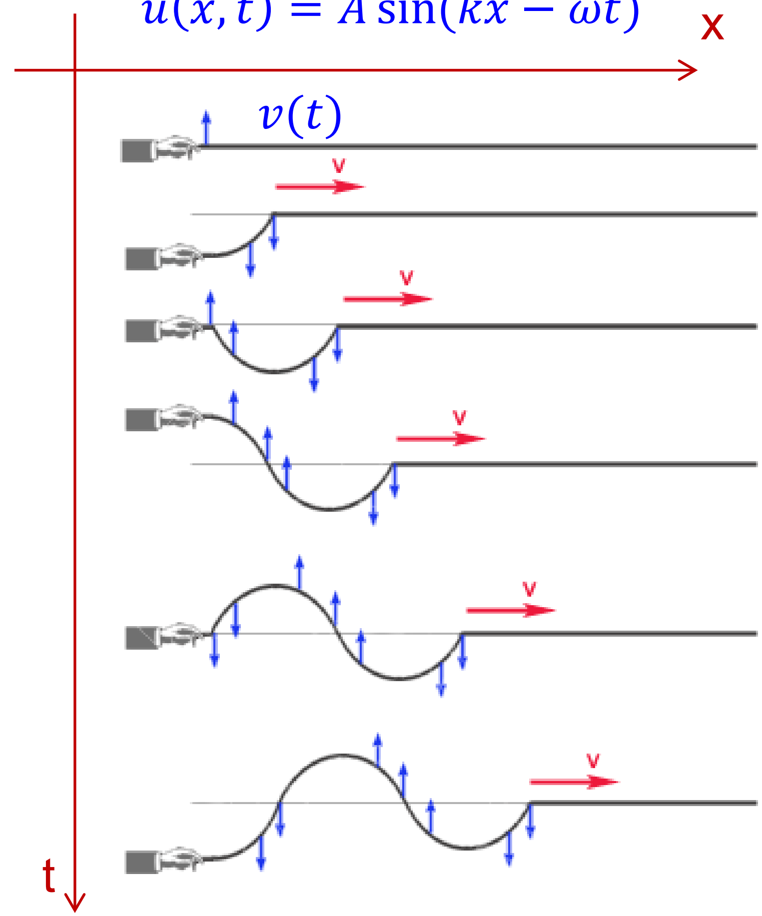
można zapisać używając operatora d’Alamberta: $\square \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$

$$\boxed{\square\, \mathbf{u(x,y,z,t) = 0}}$$

# Fale sprężyste (mechaniczne)

- Fale sprężyste rozchodzą się  w ośrodku wykazującym sprężystość objętości lub sprężystość postaci (gazy, ciecze i ciała stałe).

$$u(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$




- Z każdą falą sprężystą stowarzyszone są trzy rodzaje prędkości.
  - Prędkość ruchu cząstek - jest to prędkość chwilowa  (np. drgań harmonicznych) ruchu cząsteczek (punktów) ośrodka sprężystego wokół ustalonych położeń równowagi;

    $$v(t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -A\,cos(kx - \omega t)$$

  - Prędkość fazowa (falowa) – jest to prędkość $v$ z jaką przemieszcza się w ośrodku powierzchnia stałej fazy (np. garby lub doliny fali biegnącej w sznurku)

    $$v = \frac{dx}{dt}$$

    faza fali: $\Phi = kx \ - \omega t,$

# Prędkość fazowa i grupowa

Faza fali: $\Phi = kx - \omega t$ ma pozostać stała, czyli $d\Phi = 0$.

liczymy: $d\Phi = k\,dt - \omega\,dt\,,\quad d\Phi = 0$,

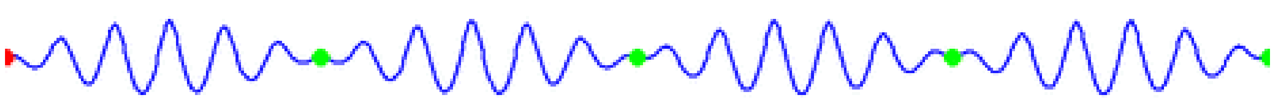
gdy: $\boldsymbol{\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\omega}{k} \equiv v}$ **prędkość fazowa**

Obliczona tak prędkość fazowa jest dodatnia –stąd wiemy, że fala rozchodzi się w stronę „dodatnich" „x".

*Zad: Obliczyć prędkość fazową dla fali propagującej się w przeciwnym kierunku:*

$$u(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

- Prędkość grupowa – jest to prędkość $v_{gr}$ pakietu (grupy, paczki) fal. Jest to prędkość z jaką przenoszona jest przez falę sprężystą energia $v_{gr} = \dfrac{d\omega}{dk}$



prędkość fazowa $\geqslant$ prędkość grupowa

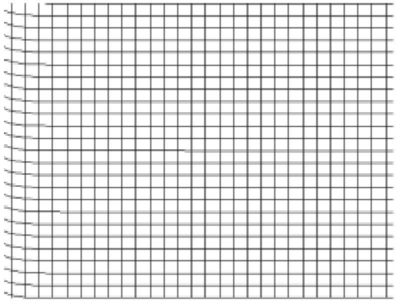
http://pl.wikipedia.org/wiki/Pr%C4%99dko%C5%9B%C4%87_grupowa

# Prędkość fal

- Praktycznie za prędkość fali uważa się prędkość fazową: $\boldsymbol{v = \frac{\omega}{k}}$
- Prędkość rozchodzenia się fali zależy od właściwości sprężystych ciał, nie zależy od częstotliwości, ani amplitudy:

$$v = \sqrt{\frac{czynnik\ sprężystości}{czynnik\ bezwładności}}$$

  - np. fala w napiętym sznurze rozchodzi się z prędkością: $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , $F$- siła sprężystości, $\mu$ – masa liniowa (masa/jedn. długości),
  - fala poprzeczna w ciele stałym: $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ , G- moduł sztywności
  - fala podłużna w ciele stałym: $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ , E- moduł Younga



http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound

# Energia przenoszona przez fale

- Szybkość wykonywania pracy – MOC: $P(t) = F(t)\, v(t)$

$$P = -\mathrm{F}\,\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x} = FA^2 k\omega\, cos^2(kx - \omega t) = 4\pi A^2 f^2\, cos^2(kx - \omega t)$$

- Moc (szybkość przepływu energii):
  - oscyluje w czasie,
  - jest proporcjonalna do kwadratu amplitudy i częstotliwości.

# Interferencja fal

- Interferencja – zjawisko nakładania się fal.
- W wyniku nałożenia się dwóch fal o tych samych częstościach i amplitudach, ale różniących się o fazę $\varphi$:

$$u_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$
$$u_2(x,t) = A\sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- Nakładające się fale dodają się algebraicznie: $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$

  zatem dostajemy falę, która jest postaci:

- $$\boldsymbol{u(x,t) = 2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\underbrace{\sin\big(kx - \omega t}_{\text{amplituda fali wypadkowej}} + \frac{\varphi}{2}\big)}$$

por. nakładanie drgań!

- Wynik nakładania się fal (interferencji) zależy wyłącznie od różnicy faz $\varphi$. Dla $\varphi = 0$ fale są zgodne w fazie i wzmacniają się maksymalnie $(A' = 2A)$, dla $\varphi = 180°$ fale są przeciwne w fazie *i* wygaszają się ($A' = 0$).

- Nakładające się fale nie wpływają na siebie wzajemnie – gdy równocześnie pojawi się kilka efektów, ich skutek jest sumą efektów poszczególnych skutków- **ZASADA SUPERPOZYCJI**

# Fale stojące

- **Interferencja** dwu fal o równych częstotliwościach i amplitudach, ale rozchodzących się **w przeciwnych kierunkach** - np fala rozchodząca się w danym ośrodku (ciele) odbija się od granicy ośrodka (ciała) i nakłada się na falę padającą.
- Nakładamy fale o równaniach:

$$u_1(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$
$$u_2(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

- Otrzymujemy falę wypadkową:

$$\boldsymbol{u(x,t) = u_1 + u_2 = \underbrace{2A\sin kx}_{\text{amplituda fali wypadkowej}}\cos\omega t}$$

policzyć!!

- Cząstki ośrodka drgają ruchem harmonicznym prostym, ale różne punkty ośrodka mają różną amplitudę drgań zależną od ich położenia ***x***. Taką falę nazywamy **falą stojącą** .
- Amplituda fali wypadkowej (część równania niezależna od czasu) zmienia się okresowo z liczbą falową $k$.

$$\boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

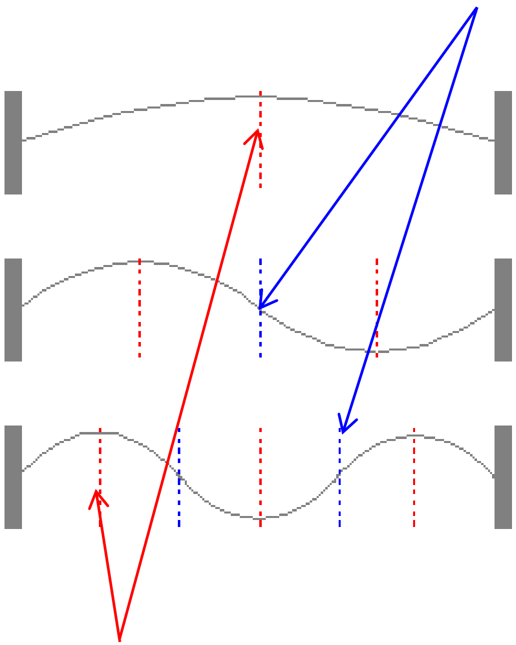
fala jako liczba zespolona – II semestr

# Fala stojąca

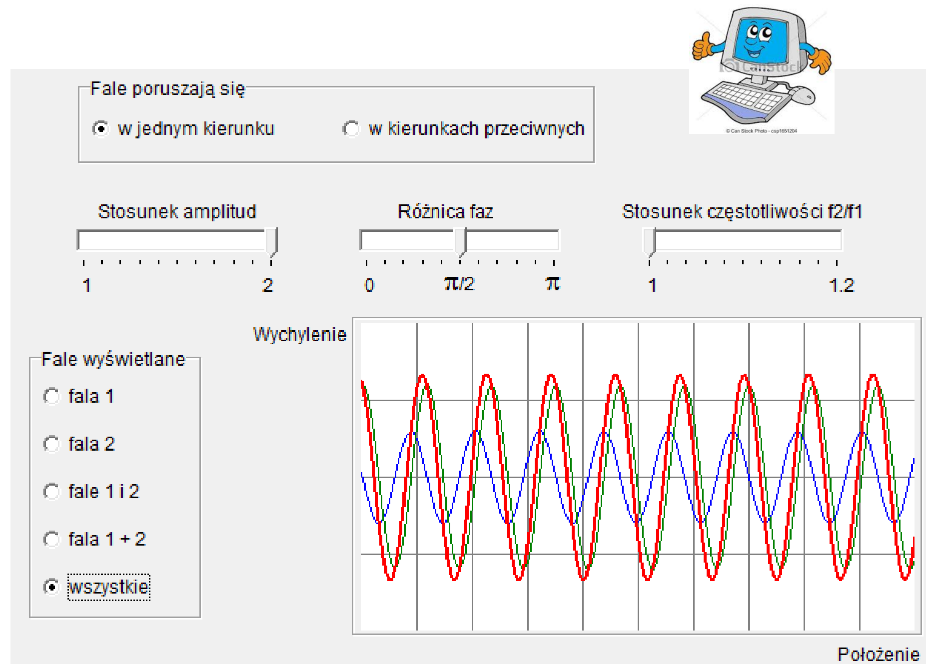
- gdy $kx = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots\right\}$, czyli $x = \left\{\frac{\lambda}{4}, \frac{3}{4}\lambda, \frac{5}{4}\lambda, \dots\right\}$ - maksymalna amplituda. Wtedy w punktach $x$ mamy strzałki fali.

$$\boldsymbol{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

- gdy $kx = \{\pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$, czyli $x = \left\{\frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, \dots\right\}$ - minimalna amplituda. Takie punkty nazywamy węzłami fali.



strzałki



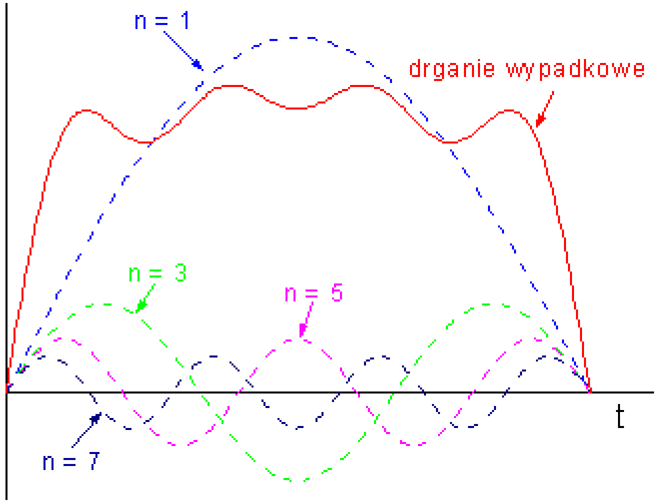

http://www.ftj.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/

# Analiza fal złożonych

- W strunie o długości $D$ zamocowanej z obu końców (poprzedni slajd) może powstać tylko fala o długości $n \cdot \frac{1}{2}\lambda = D.$
- Ogólnie – długość fal powstałych w strunie: $\lambda_n = \frac{2D}{n}$
- Prędkość fali: $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$, oraz $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , co prowadzi do zależności na częstotliwość fal stojących w strunie:

$$f_n = \frac{n}{2D} v = \frac{n}{2D}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Analiza Fouriera: Dowolne drganie okresowe o okresie $T$ możemy przedstawić jako kombinację liniową (sumę) drgań harmonicznych o okresach danych wzorem $T_n = T/n$, gdzie $n$ jest liczbą naturalną.




por. drgania!

# Modulacja

- Fala stojaca – fala o amplitudzie stałej w czasie, ale zależnej od położenia cząstki w przestrzeni (interferencja w przestrzeni).
- Jeśli dodamy fale nieznacznie różniące się częstotliwościami i zbadamy jaką amplitudę dostaniemy w pewnej chwili czasu t – zbadamv interferencie w czasie.
- Znane z poprzedniego wykładu wzory:

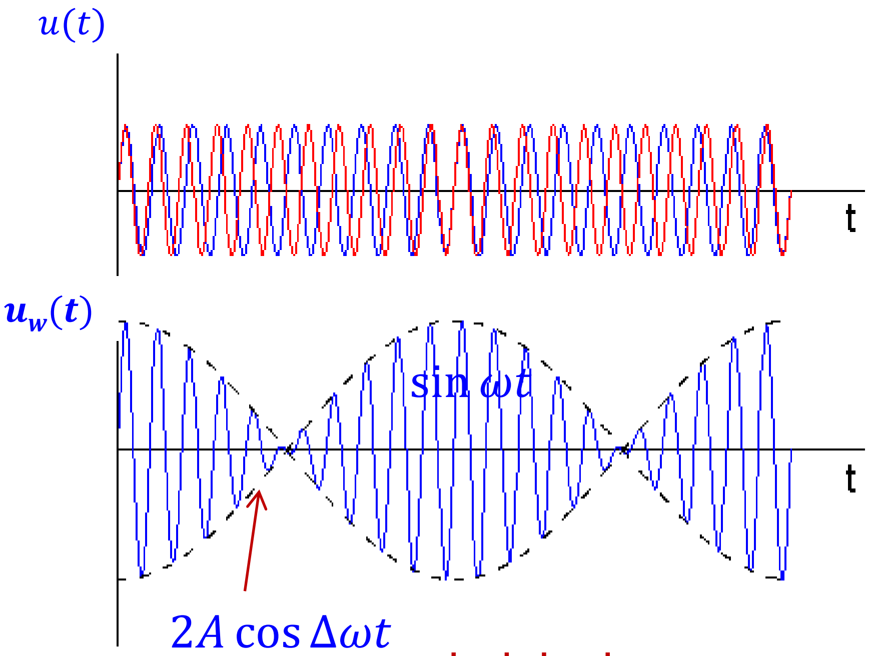
$$u_1(t) = A\sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t$$

$$u_2(t) = A\sin(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})t$$

$$u_w(t) = u_1(t) + u_2(t) =$$

$$A\left[\sin(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})t + \sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t\right]$$

$$u_w(t) = \underbrace{2A\cos\Delta\omega t}_{\text{amplituda fali wypadkowej}}\sin\omega t$$

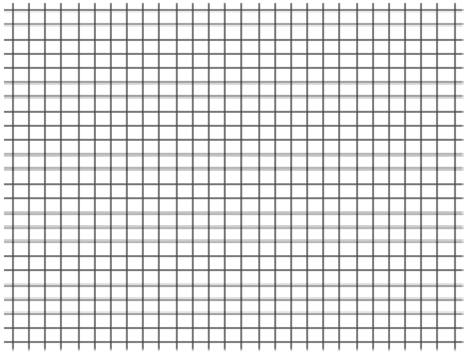



dudnienia

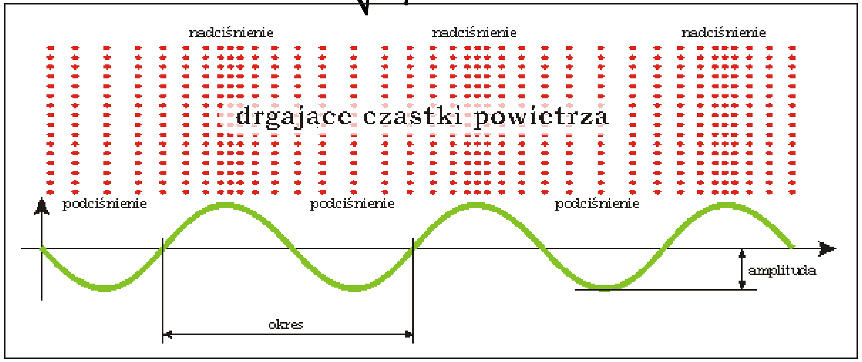
# Fale akustyczne

- Fale akustyczne - podłużne fale sprężyste.
  - Rozchodzą się w każdym materialnym ośrodku sprężystym. Prędkość zależy od własności sprężystych ośrodka.
  - Podczas propagowania się w ośrodku wprawiają w ruch drgający cząsteczki ośrodka - powstają lokalne zmian gęstości i ciśnienia ośrodka wzdłuż kierunku ruchu fali.

    1. Infradźwięki – $0 < f \leq 20$ Hz.
    2. Fale dźwiękowe (dźwięk) – $20 \leq f \leq 20$ kH
    3. Ultradźwięki – f > od 20 kHz.



Prędkość dźwieku: $v = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$, $\mu$- masa molowa




http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound

# Zjawisko Dopplera

- Częstość fali akustycznej zależy od prędkości względnych źródła i odbiornika tych fal.

  Z życia codziennego wiemy, że jeśli źródło i odbiornik zbliżają (oddalają) się do siebie, to częstość odbieranej fali jest większa (mniejsza) od częstości emitowanej przez źródło.

**Efekt Dopplera** (1842)

**1.** Obserwator porusza się, źródło spoczywa.

- Odbiornik zbliża się do źródła z prędkością $\boldsymbol{v_0}$.

Jeżeli fale o długości $\boldsymbol{\lambda}$ rozchodzą się z prędkością $\boldsymbol{v}$ to w czasie $\boldsymbol{t}$ dociera do nieruchomego obserwatora $\frac{\boldsymbol{vt}}{\boldsymbol{\lambda}}$ fal. Jeżeli obserwator porusza się w kierunku źródła (wychodzi falom na przeciw) to odbiera jeszcze dodatkowo $\frac{\boldsymbol{v_0 t}}{\boldsymbol{\lambda}}$ fal.

W związku z tym częstotliwość $\boldsymbol{f'}$ słyszana przez obserwatora

$$f' = \frac{n_{fal}}{t} = \frac{\frac{v\,t}{\lambda} + \frac{v_0\,t}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_0}{\lambda} = \frac{v + v_0}{\frac{v}{f}} = f\,\frac{v + v_0}{v}$$

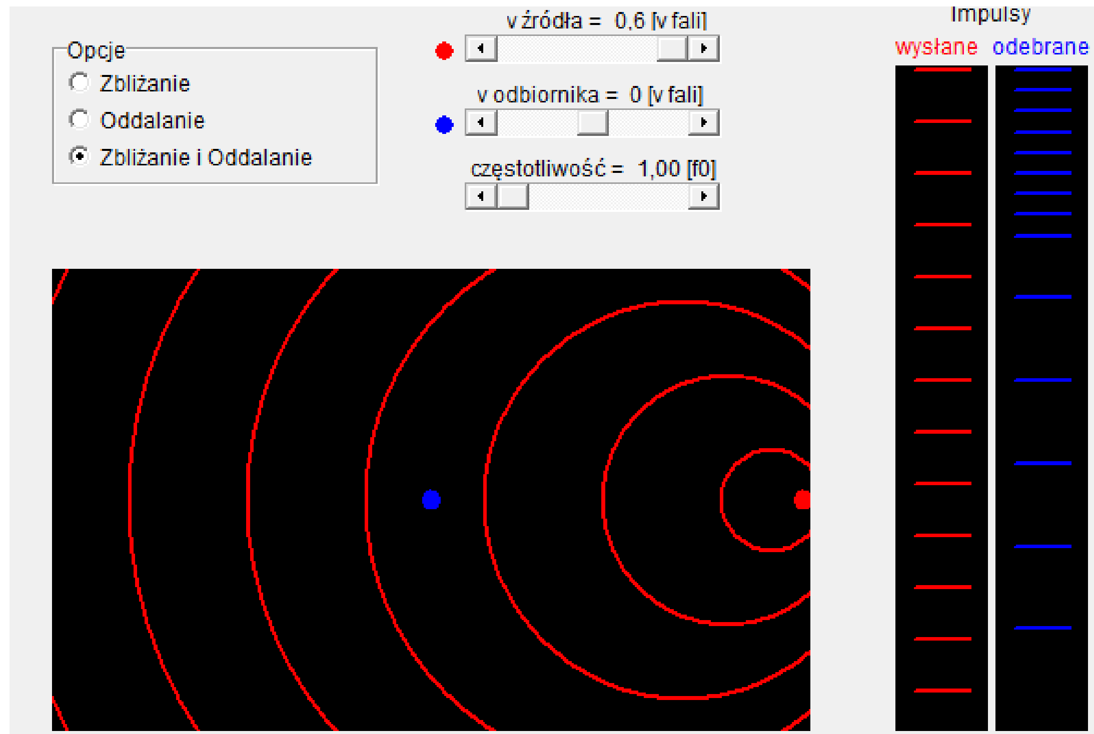
# Efekt Doplera cd

- Przybliżający się obserwator rejestruje wyższą częstotliwość niż częstotliwość źródła (oddalający – zmienić znak „+” na „-” – częstotliwość zmiejsza się).

$$f' = f\,\frac{v + v_0}{v}$$

**2.** Źródło porusza się z prędkością $\boldsymbol{v_z}$ względem nieruchomego obserwatora:

$$f' = f\,\frac{v}{v - v_z}$$




https://home.agh.edu.pl/~kakol/efizyka/w13/main13h.html/

# Podsumowanie

- Przykłady ruchu falowego
- Podział ze względu na
  - a) rodzaj ośrodka
  - b) kierunek rozchodzenia
- Równanie falowe – rozwiązanie, parametry ruchu, predkość fazowa i grupowa
- Interferencja fal.
- Analiza Fouriera fal złożonych.
- Zjawisko Dopplera.