Podstawy fizyki – sezon 1
VII. Ruch drgający

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~amucha

Ruch skutkiem działania siły

- Przypominamy: ruch ciała spowodowany jest (nie-)działaniem siły. Można znaleźć położenie, prędkość i przyspieszenie ciała, jeżeli znamy siłę, która na ciało działa.

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)}$$

- Do tej pory pokazano dwa przykłady:
  - ruch ciała w polu siły ciężkości

$$F_g = \mathrm{mg}$$

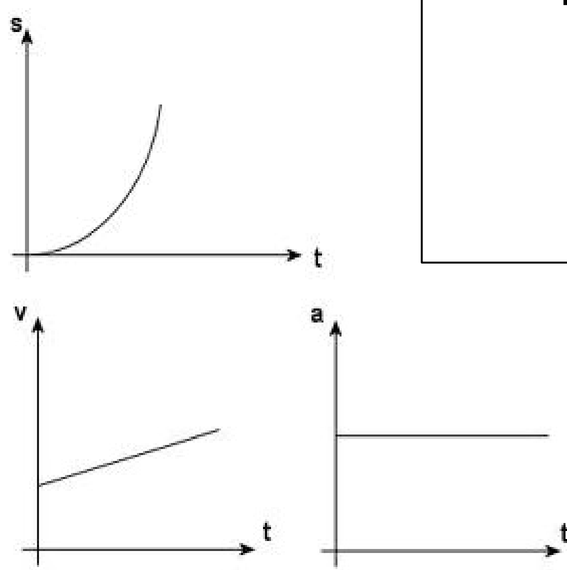
$$m\,\frac{dv}{dt} = mg$$

Rozwiązujemy:

$$a(t) = g$$

$$v(t) = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

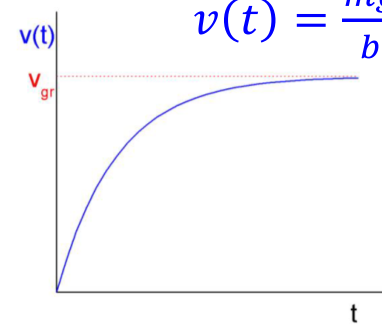


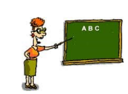
  - ruch ciała w polu siły ciężkości z oporem powietrza

$$F_{op} = -bv$$

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - bv$$

$$v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$





sprawdzam!:

Siła harmoniczna

- Załóżmy, że chcemy opisać ruch pod wpływem siły postaci: $\boldsymbol{F(x) = -kx}$

  i. Jaką sytuację fizyczną opisuje taka siła?

  Jest to siła proporcjonalna do przemieszczenia i skierowana przeciwnie do przemieszczenia – **SIŁA HARMONICZNA**

  ii. Napiszmy równania ruchu:

$$\boldsymbol{m\frac{dv}{dt} = -kx}$$

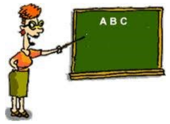
$$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

  iii. Rozwiążmy równania ruchu:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

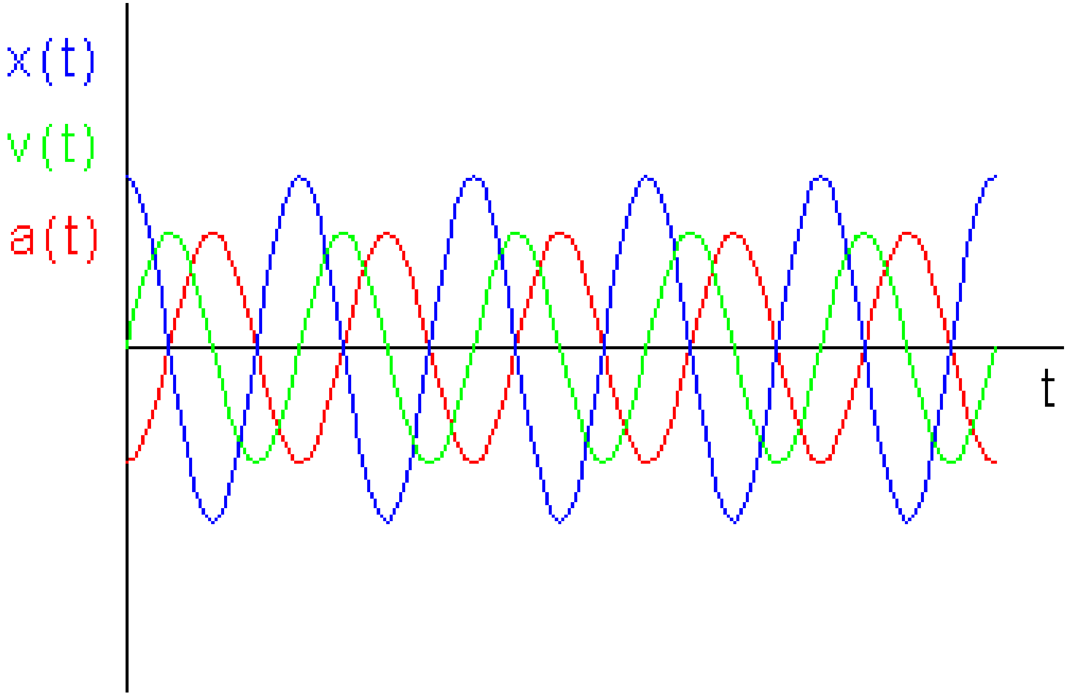


  iv. Zinterpretujmy rozwiązania.

$\boldsymbol{A}$- amplituda, $\boldsymbol{\omega}$ – częstość, $\boldsymbol{\varphi}$ - faza początkowa

Ruch harmoniczny - interpretacja

- Położenie, prędkość i **przyspieszenie** ciała są okresowymi funkcjami czasu!



$$x_{max} = A$$
$$v_{max} = A\omega$$
$$a_{max} = A\omega^2$$

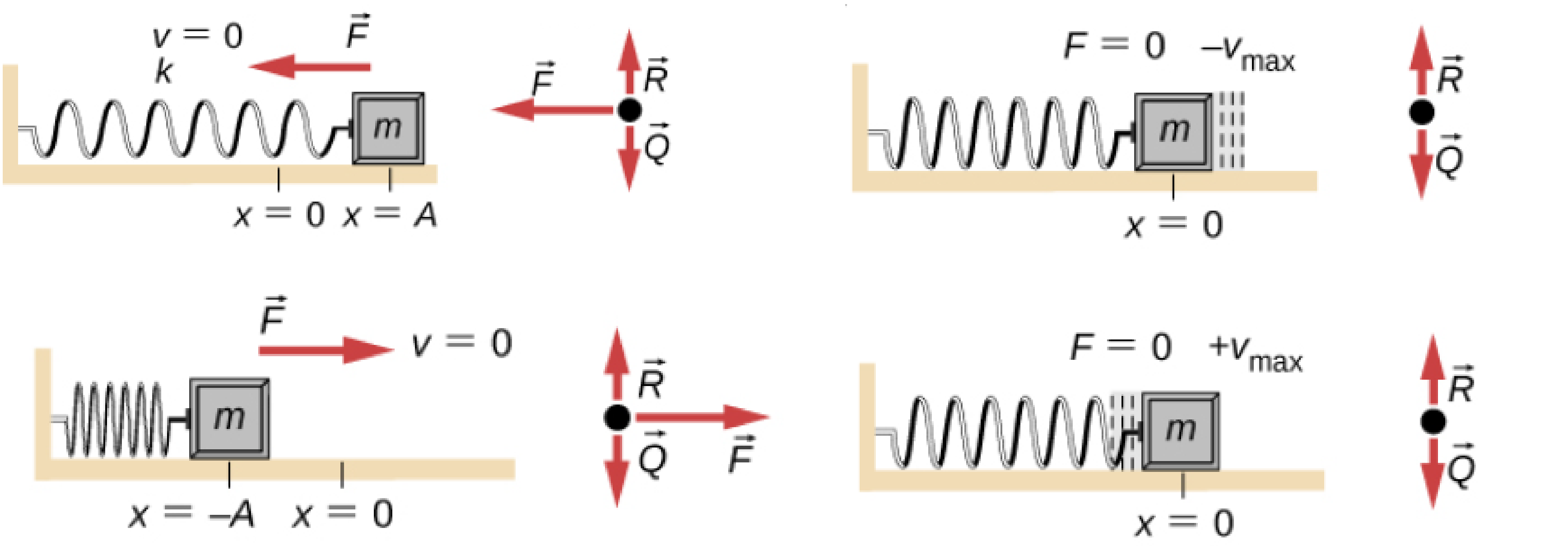
Z.Kąkol

- Ruch pod wpływem siły harmonicznej nazywamy **ruchem harmonicznym**.

Nie każdy ruch okresowy jest ruchem harmonicznym.

Ruch harmoniczny - interpretacja

- Położenie, prędkość i **przyspieszenie** ciała są okresowymi funkcjami czasu!



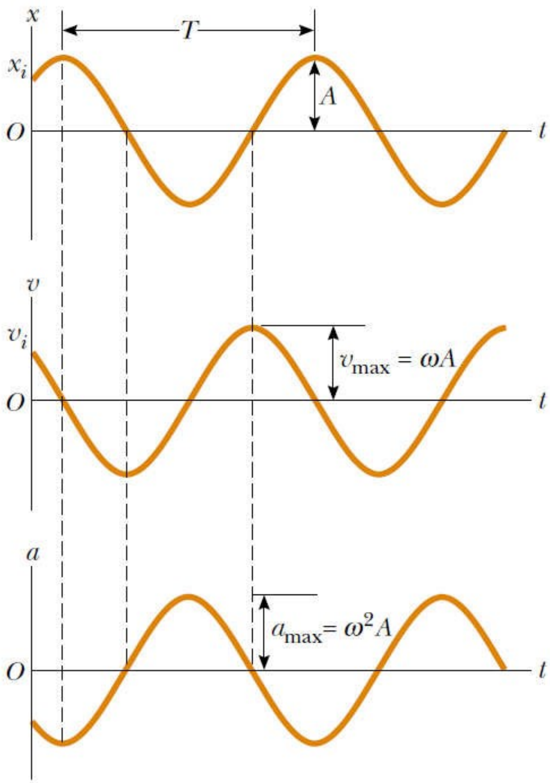
https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

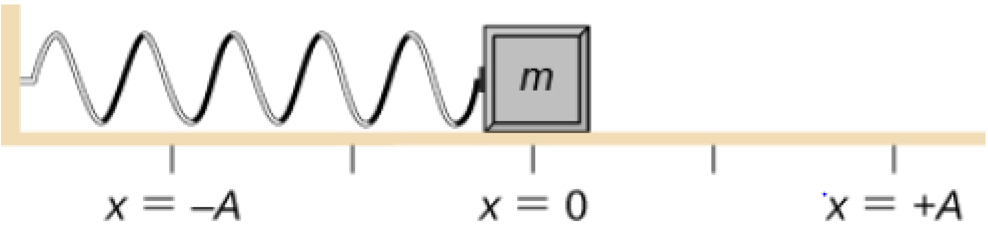
- Ruch pod wpływem siły harmonicznej nazywamy **ruchem harmonicznym**.

Nie każdy ruch okresowy jest ruchem harmonicznym.

Ruch drgający w przykładach

- Oscylator harmoniczny – masa zawieszona na sprężynie. Ruch masy m spowodowany jest siłą sprężystości sprężyny



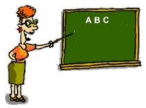


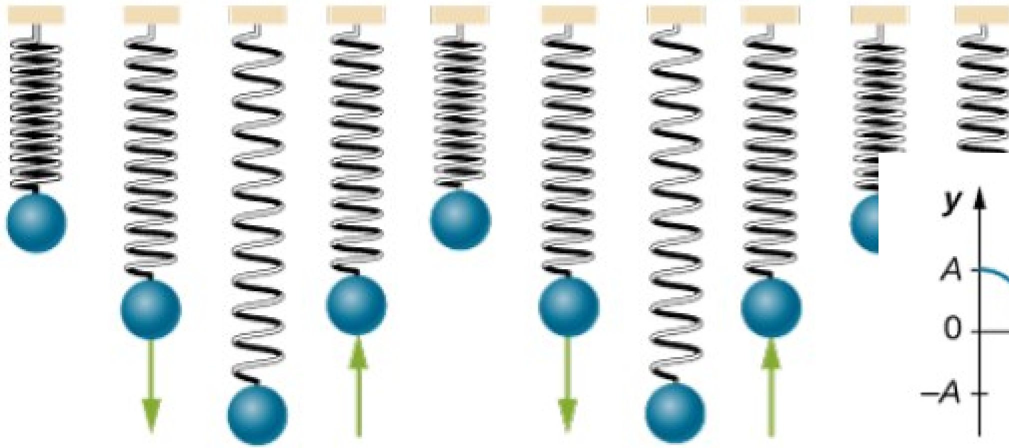
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

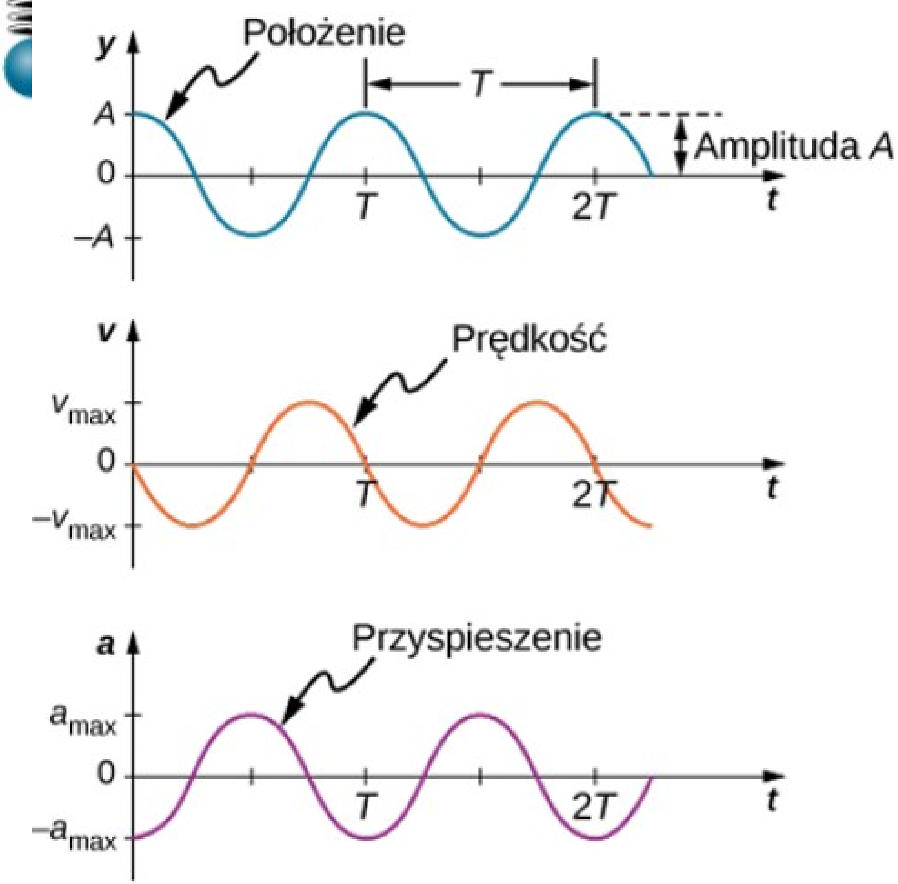
$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$







$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

Energia drgań

- Energia kientyczna i potencjalna w ruchu harmonicznym:

$$E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}mx^2(t) = \frac{1}{2}kA^2 cos^2(\omega t + \varphi)$$

- Energia całkowita:

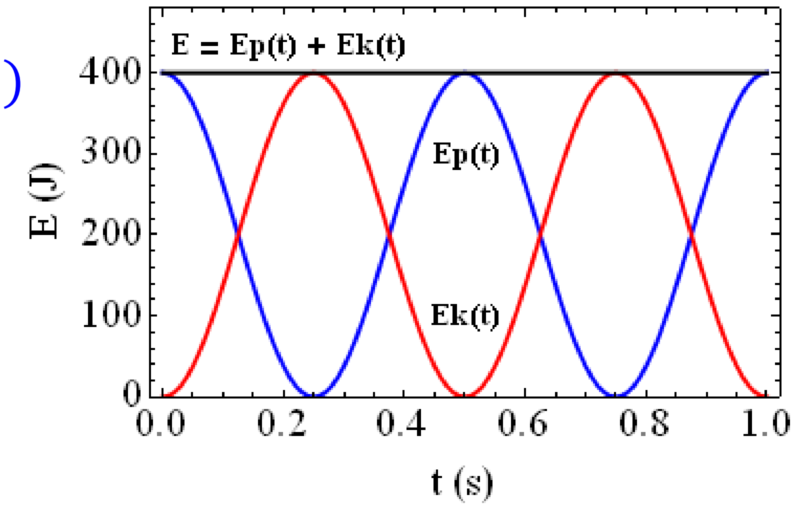
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

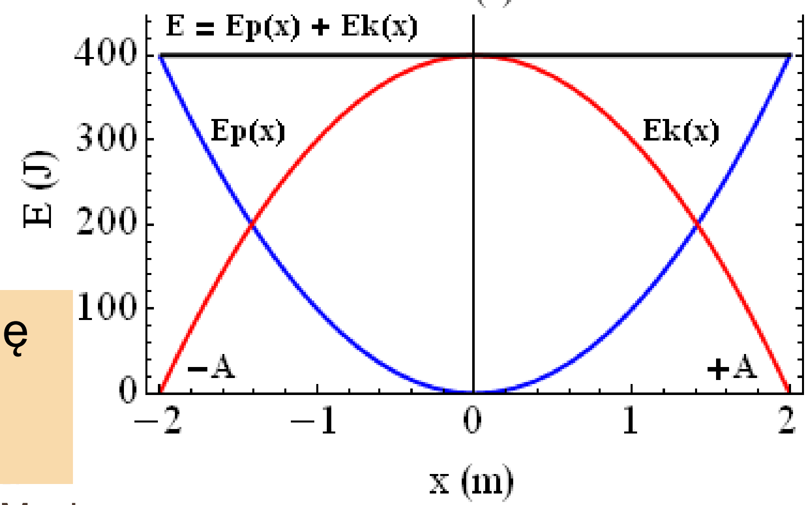
$$E_c = E_p(t) + E_k(t) =$$

$$\frac{1}{2}kA^2\left[cos^2(\omega t + \varphi) + sin^2(\omega t + \varphi)\right] =$$

$$\frac{1}{2}kA^2$$

Energia kinetyczna i potencjalna zmieniają się okresowo z czasem,
całkowita energia jest stała



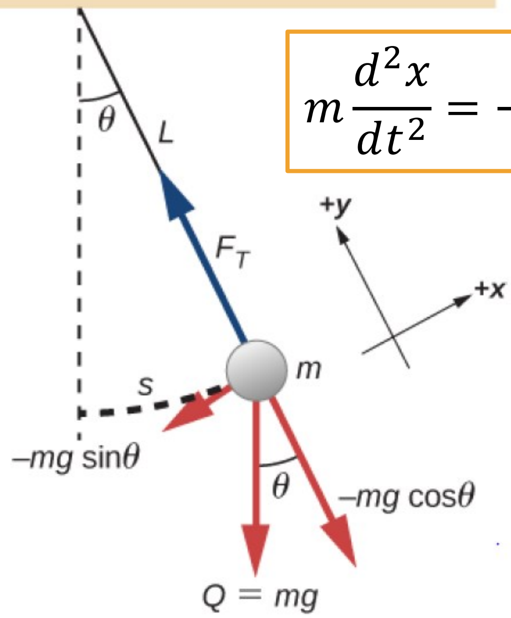


http://efizyka.net.pl/energia-w-ruchu-harmonicznym_8048

Ruch drgający w przykładach-wahadła

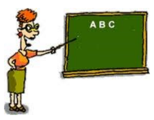
$F_h = -kx$

- Wahadło matematyczne



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mgsin\theta$$

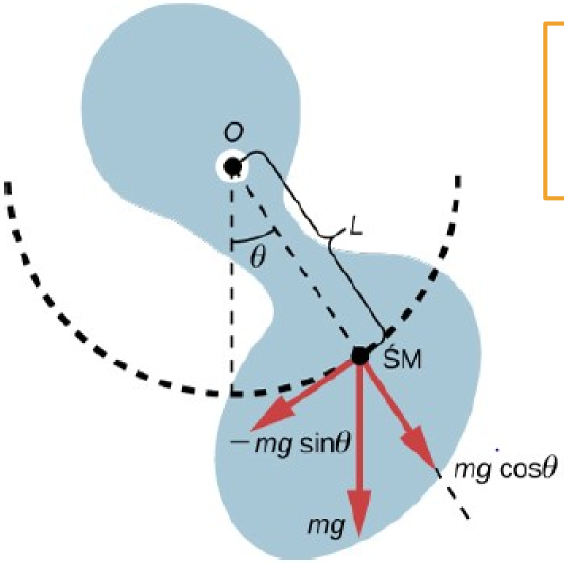
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



wyprowadzam!

- Wahadło fizyczne

$I\mathcal{E} = M_q$



$$I\frac{d^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -Lmg\theta$$

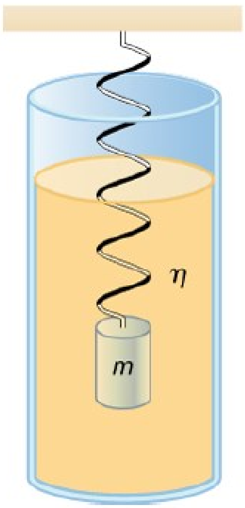
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Ruch wahadła matematycznego i fizycznego jest harmoniczny TYLKO dla **MAŁYCH WYCHYLEŃ**, tzn. takich, że:

$$\sin\varphi = \varphi$$

Drgania tłumione

- Załóżmy teraz, że masa drgająca na sprężynie zanurzona jest w gęstej cieczy.
- Obserwujemy tłumienie drgań – ruch odbywa się pod wpływem siły sprężystości $\mathbf{F_s = -kx}$ i siły tłumiącej $\boldsymbol{F_{tł} = -bv}$:

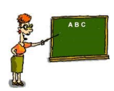


II Zas.Dyn.New: $$\boldsymbol{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}}$$

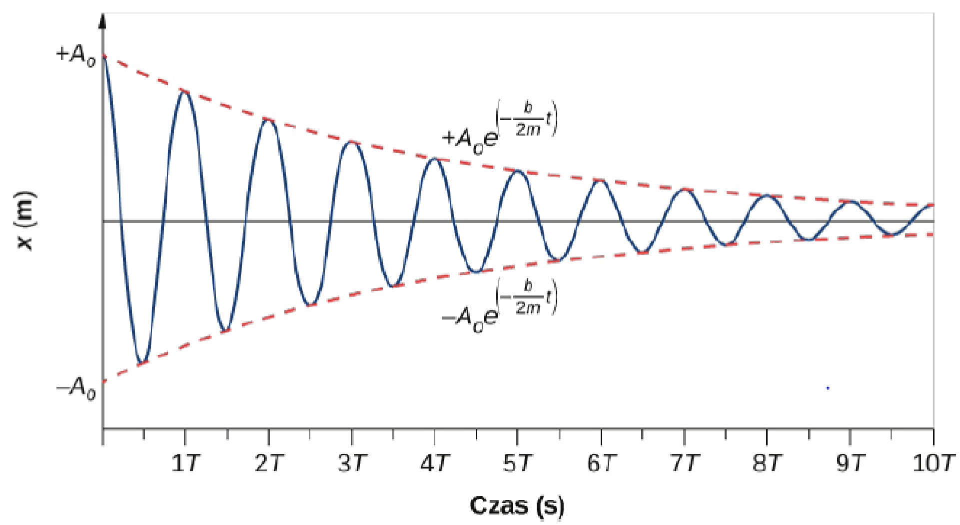
- Rozwiązanie równania ruchu oscylatora tłumionego:

$$x(t) = Ae^{-\frac{bt}{2m}}\cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$



sprawdzam!



- Energia:

$$E(t) = \frac{1}{2}\,kA\,e^{-\frac{bt}{2m}}$$

Drgania tłumione w zależności od tłumienia

- Rozwiązanie równania ruchu oscylatora tłumionego:

$$x(t) = \underbrace{Ae^{-\frac{bt}{2m}}}_{\text{amplituda drgań tłumionych}} \cos(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\boxed{\omega_0}^2 - \beta^2} \qquad \beta = \frac{b}{2m}$$

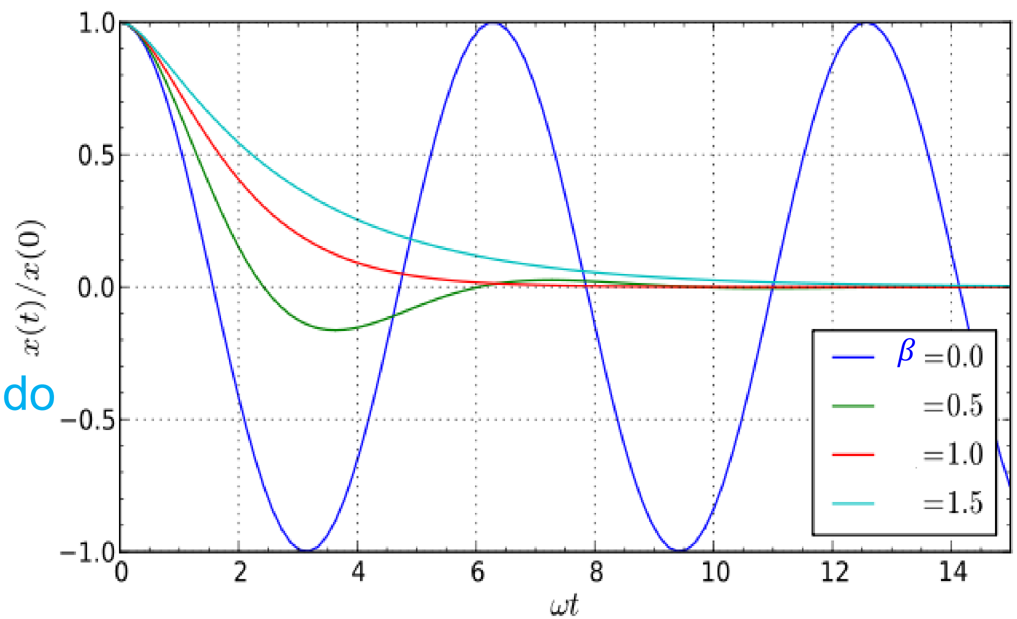
częstość kołowa drgań własnych

częstość kołowa drgań tłumionych

współczynnik tłumienia

- W zależności od współczynnika tłumienia:

- gdy $b^2 < 4mk$ drgania tłumione,
- gdy $b^2 = 4mk$ tłumienie krytyczne,
- gdy $b^2 > 4mk$ aperiodyczny powrót do stanu równowagi



$$\boldsymbol{\beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau}}$$

$\boldsymbol{\beta}$ – współczynnik tłumienia, $\boldsymbol{\tau}$ - stała czasowa

Drgania z siłą wymuszającą

- Tłumienie drgań można kompensować działając siłą wymuszającą, np. okresową: $F_z = F_0 \sin \omega t$

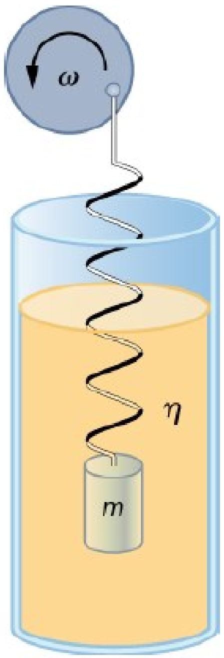
II Z.D.N:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \sin \omega t$$

$$\beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau};$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\alpha_0 = \frac{F_0}{m}$$



- Rozwiązujemy?

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dx}{dt} + \omega_0 x = \alpha_0 \sin \omega t$$

Załóżmy, że rozwiązanie jest postaci:

$$x(t) = A_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

co oznacza drgania niegasnące, ale zarówno amplituda, jak i przesunięcie fazowe są funkcją częstości siły wymuszającej ω

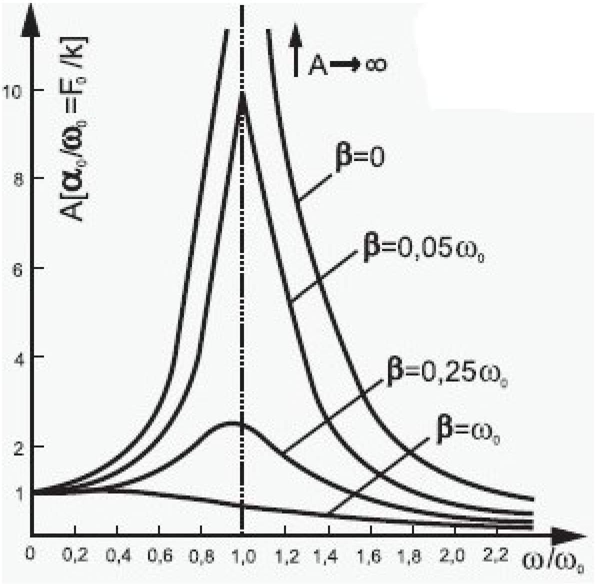
Drgania z siłą wymuszającą

- Pokazać można, że amplituda drgań z siłą wymuszającą wynosi:

$$A_0(\omega) = \frac{\alpha_0}{[({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2]^{1/2}}$$

a przesunięcie fazowe:

$$tg\ \varphi = -\frac{2\beta\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$$

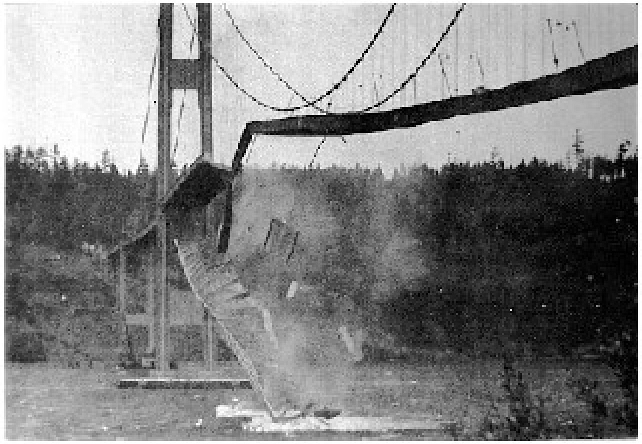


- Gdy częstość siły wymuszającej ω będzie w pobliżu częstości drgań własnych ω_0, a tłumienie β nie będzie za duże:
  amplituda wzrośnie do maksimum!
- Może dojść do zjawiska **REZONANSU**

Rezonans

- Częstość rezonansowa (obliczymy ją poprzez znalezienie maksimum $\mathrm{A}_0(\omega)$):
  - $\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\beta^2}$
- Odpowiada ona amplitudzie rezonansowej:
- $A_r = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{{\omega_0}^2 - 2\beta^2}}$
- Dla drgań swobodnych, dla których: $\omega_r = \omega_0$ przesunięcie fazowe φ pomiędzy siłą a wychyleniem wynosi: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
- Oznacza to, że siła wymuszająca jest przesunięta o $\frac{\pi}{2}$ w stosunku do wychylenia.
- Ale za to prędkość (policz!) jest w fazie z siłą wymuszającą!
- Moc zależy od prędkości, zatem w warunkach rezonansu dochodzi do maksymalnej absorbcji mocy przez oscylator – znaczenie przy rezonansie elektrycznym

Drgania, rezonanse i życie



Wiatr wywołujący drgania o częstości zbliżonej do częstości własnej drgań mostu prowadzi do jego zniszczenia (Tacoma Narrows, USA 1940)

Składanie drgań harmonicznych

- Zasada superpozycji – jeżeli ciało podlega jednocześnie dwóm drganiom, to jego wychylenie jest sumą wychyleń wynikających z każdego ruchu z osobna.

- Składanie drgań zachodzących w tych samych kierunkach:

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\boldsymbol{x_w(t) = x_1(t) + x_2(t)}$$

- Składanie drgań w kierunkach wzajemnie prostopadłych:

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \varphi_x) \qquad \mathrm{y}(t) = A_y \cos(\omega_y t + \varphi_y)$$

$$\boldsymbol{y(x)}$$

Składanie drgań (jeden kierunek)

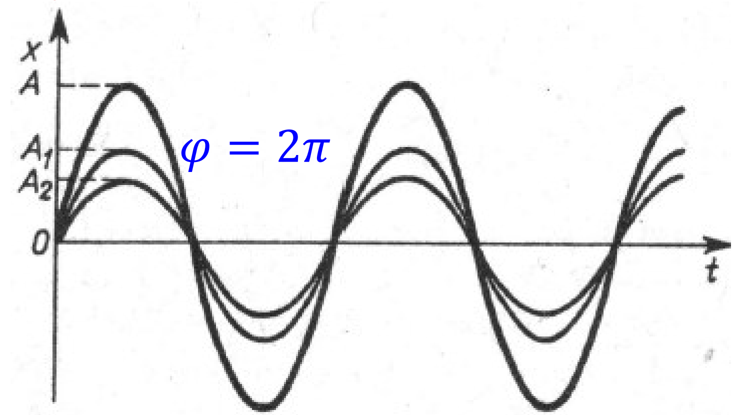
- Składamy drgania o tej samej (lub nie) amplitudzie i częstości. Drgania są przesunięte względem siebie o fazę φ :

$$x_1(t) = A\cos\omega t\;; \qquad x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

- W wyniku złożenia otrzymujemy (do policzenia, zwykła trygonometria!):

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{amplituda wypadkowa}}\cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

- Są to drgania o amplitudzie wypadkowej zależnej od fazy φ:
  - dla $\varphi = \pi$; $x_w = 0$ – całkowite wygaszenie drgań,
  - dla $\varphi = 2\pi$; $x_w = 2A\cos\omega t$ – dwukrotny wzrost amplitudy drgań - wzmocnienie,



- Jeżeli różnica faz pozostaje stała w czasie – drgania koherentne

Dudnienia

- Nakładanie się drgań o bardzo zbliżonych częstościach:

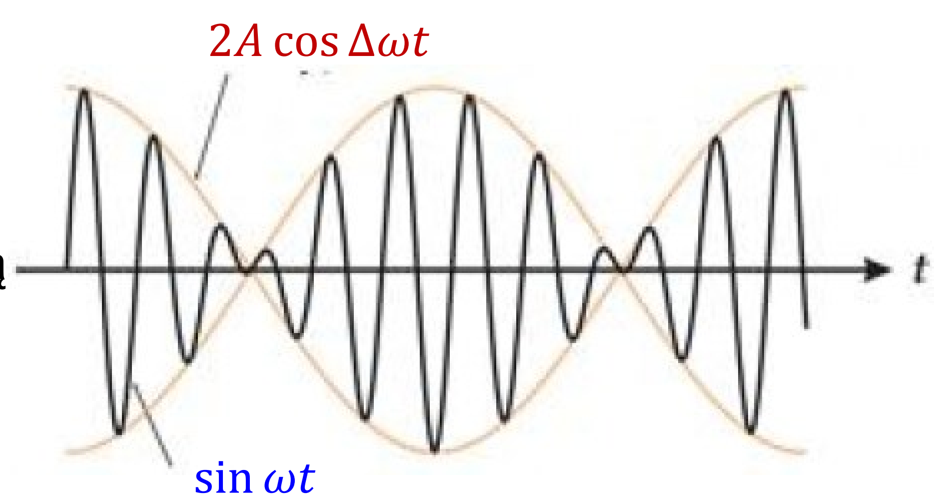
$$x_1(t) = A\sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t \qquad x_2(t) = A\sin(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})t$$

$$x_w(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\left[\sin(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})t\ + \sin(\omega + \frac{\Delta\omega}{2})t\right]$$

- Korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$x_w(t) = \underbrace{2A\cos\Delta\omega t}_{\text{wolnozmieniająca się amplituda wypadkowa}}\ \sin\omega t$$



- Efekt sumowania – drgania z pierwotną częstością, ale obwiednia zmienia się powoli w czasie (efekty dźwiękowe, elektrotechnika)

Składanie niekoherentne

- Jeżeli różnica faz drgań składowych zmienia się z upływem czasu w dowolny sposób, to również amplituda drgań wypadkowych zmienia się z czasem – niekoherentne składanie drgań.
- Drgania wypadkowe typu:

$$x(t) = A(t)\cos[\omega t + \varphi(t)]$$

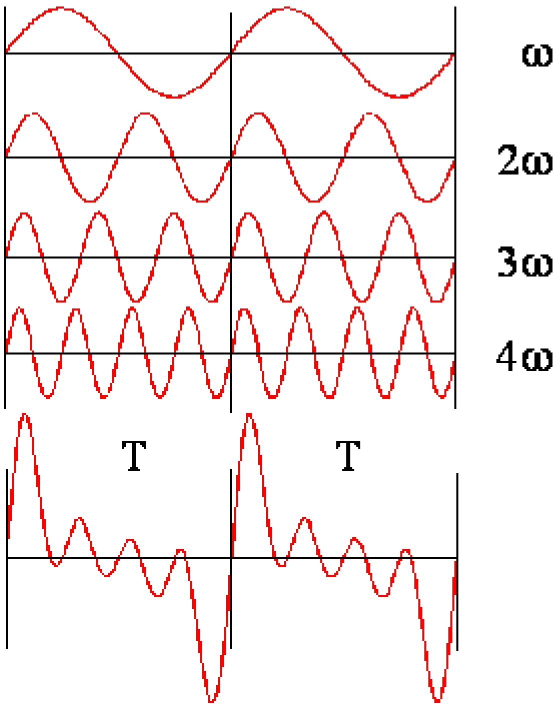
nazywamy modulowanymi, gdy:

  - $A = const;\ \varphi(t)$ - modulowana jest faza – FM
  - $\varphi = const; \frac{dA}{dt} \ll \omega Amax$ - modulowana amplituda - AM

Analiza harmoniczna

- Analiza harmoniczna – metoda przedstawienia złożonych drgań modulowanych w postaci szeregu prostych drgań harmonicznych
- G.Fourier – dowolne drganie można przedstawić jako sumę prostych drgań harmonicznych o wielokrotnościach pewnej podstawowej częstości kątowej ω:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} A_n \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$



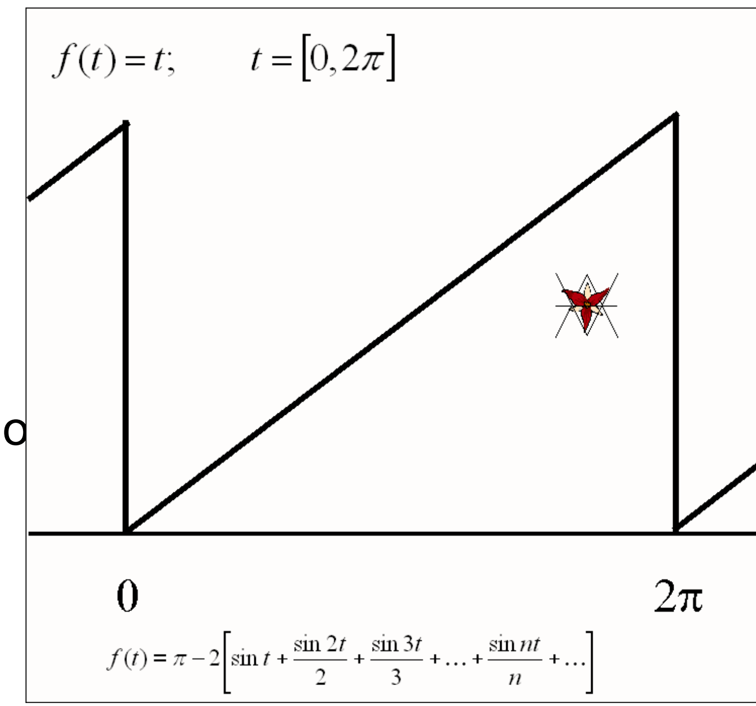
  - Pierwszy wyraz szeregu – częstotliwość podstawowa ω, następne – częstotliwości harmoniczne- „pierwsza”, „druga”, itp.
  - W ten sposób można za pomocą prostych drgań harminicznych przedstawić drganie o dowolnym kształcie, np. piłokształtnym, trójkątnym, prostokątnym..

Analiza harmoniczna

- Analiza harmoniczna – metoda przedstawienia złożonych drgań modulowanych w postaci szeregu prostych drgań harmonicznych
- G.Fourier (1807)– dowolne drganie można przedstawić jako sumę prostych drgań harmonicznych o wielokrotnościach pewnej podstawowej częstości kątowej ω:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} An \sin(n \cdot \omega t + \varphi_n)$$

  - Pierwszy wyraz szeregu – częstotliwość podstawowa ω, następne – częstotliwości harmioniczne- „pierwsza”, „druga”, itp.
  - W ten sposób można za pomocą prostych drgań harminicznych przedstawić drganie o dowolnym kształcie, np. piłokształtnym, trójkątnym, prostokątnym..



http://www.if.pw.edu.pl/~bibliot/archiwum/adamczyk/WykLadyFO

Krzywe Lissajous

- Składania drgań harmonicznych o tych samych częstościach ω w kierunkach wzajemnie protopadłych:

$$x(t) = A_x \sin(\omega t) \qquad\qquad y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi)$$

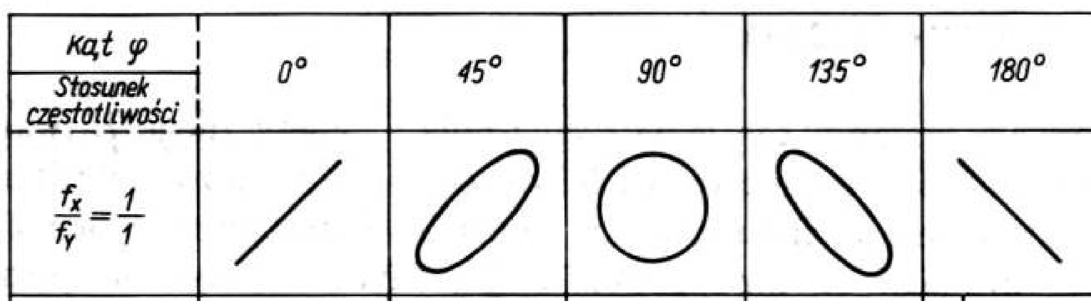
- Jules Lissajous (1857) - demonstracja wyniku, gdy:

$$\varphi = 0°, 90°, 180°$$

  - $\varphi = 0°$: $y(x) = \frac{A_y}{A_x}x$ - linia prosta
  - $\varphi = 180°$: $y(x) = -\frac{A_y}{A_x}x$ - linia prosta
  - $\varphi = 90°$: $x(t) = A_x \sin(\omega t) \quad y(t) = A_y\, cos(\omega t)$

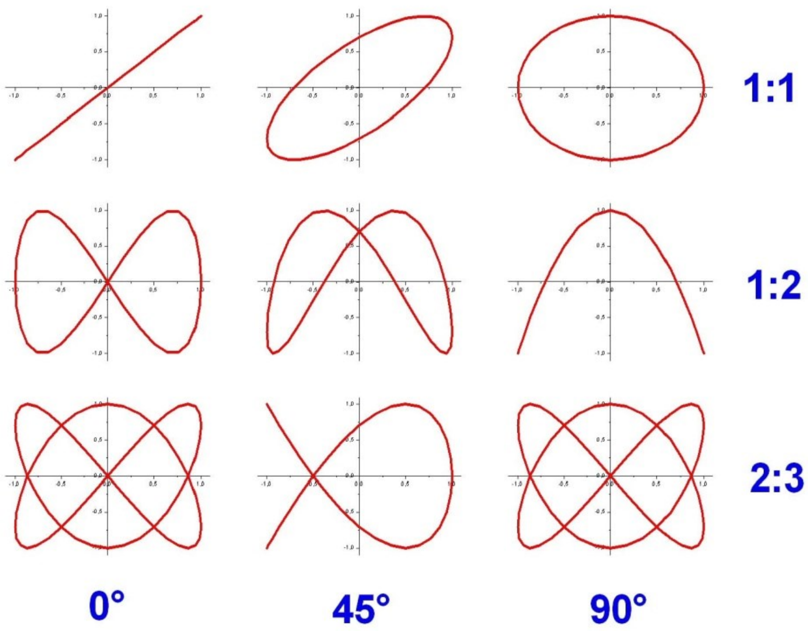
$$\frac{x^2}{{A_x}^2} + \frac{y^2}{{A_y}^2} = 1$$

– elipsa, okrąg



Krzywe Lissajous – dowolna faza

- Inne różnice faz, ale te same częstości – elipsy, ale w kierunkach innych niż osie ukł. współrzędnych.
- Przypadek ogólny – dowolne fazy, częstości, amplitudy – krzywe Lissajous:



Podsumowanie

- Rozwiązanie równania ruchu pod wpływem siły o zadanej postaci pozwala na wyznaczenie położenia, prędkości i przyspieszenia.
- Ruch pod wpływem siły harmonicznej – rozwiązanie, parametry, przykłady:
  - prosty oscylator harmoniczny,
  - wahadło matematyczne,
  - wahadło fizyczne.
- Ruch z tłumieniem – równanie, rozwiązanie, interpretacja.
- Ruch drgający pod wpływem siły wymuszającej. Rezonans.
- Składanie drgań:
  - wzmocnienie, wygaszenie, drgania koherentne,
  - dudnienia,
  - analiza harmoniczna
  - krzywe Lissajous
- Pokazy