Podstawy fizyki – sezon 1
VII. Pole grawitacyjne*

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~amucha

*** Resnick, Halliday, Walker „Podstawy fizyki", t.2**

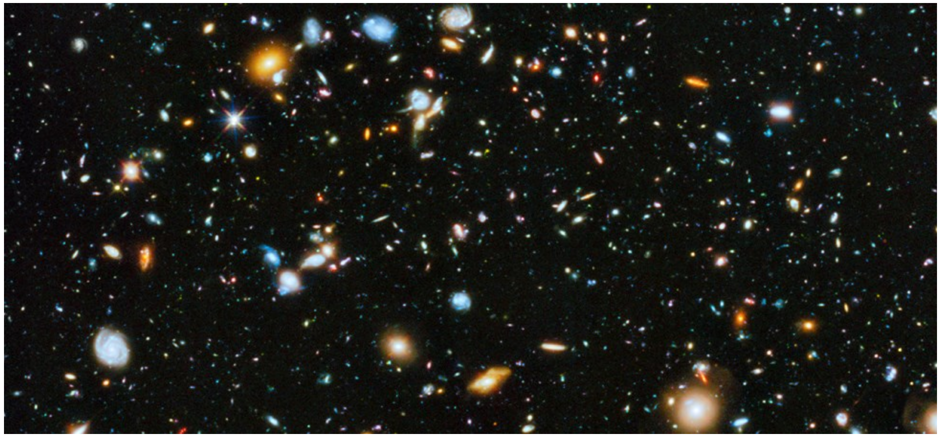
Cele wykładu (pytania egzaminacyjne)

Wiedza:

- Krótka historia obserwacji w kierunku ustalenia zasad ruchu planet (Ptolemeusz-Kepler-Kopernik) i trudności z wprowadzeniem nowych idei
- Prawo powszechnego ciążenia.

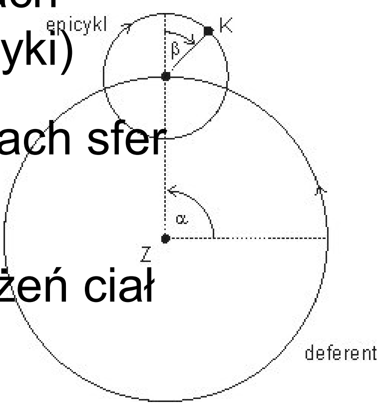
Umiejętności:

- Zastosowanie prawa powszechnego ciążenia do opisu ruchu planet i satelitów.

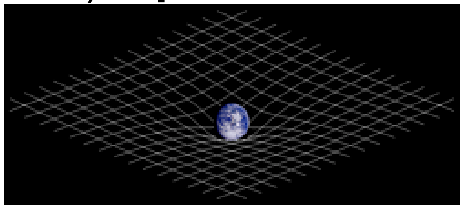


GRAWITACJA – trochę historii

- IV p.n.e. Arystoteles (Grecja)- nie ma ruchu bez przyczyny – ciało spada na Ziemię, **bo taka jest jego natura**, **cięższe** przedmioty **spadają szybciej**
- Ptolemeusz I n.e (Egipt, Aleksandria) – model geocentryczny – **Ziemia stanowiła środek**, wokół niej, po bardzo skomplikowanych orbitach poruszały się Słońce, Księżyc i inne planety (ale używał matematyki)



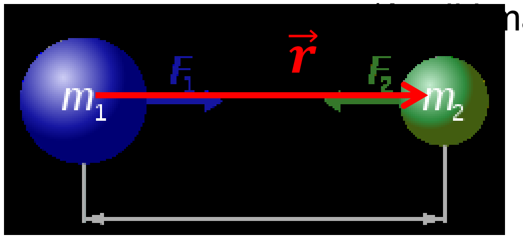
- **Kopernik – 1543** „De revolutionibus orbium coelestium" (O obrotach sfer niebieskich);
- Tycho Brahe (1546-1601) – 20 lat obserwacji „gołym okiem" położeń ciał niebieskich z dokładnością 1-2 minut kątowych (**eksperyment**!)
- Johannes Kepler (1571-1630) – **analiza** obserwacji Tycho Brahe – trzy prawa i bardzo dokładne tablice z położeniami gwazd.
- **Izaak Newton** „Matematyczne zasady filozofii przyrody" (1687) – **prawo powszechnego ciążenia**
- **Ogólna teoria względności** A. Einsteina 1915 – Zakrzywienie przestrzeni wokół źródła grawitacji



Siła grawitacji

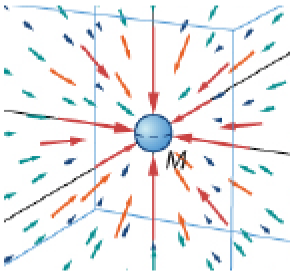
- Oddziaływanie grawitacyjne jest jednym z trzech **oddziaływań fundamentalnych**.
- Prawo powszechnego ciażenia (Newton 1687):
- Siła działająca pomiędzy dwoma punktami materialnymi o masach m_1 i m_2, znajdującymi się w odległości r, jest siłą **przyciągającą**, skierowaną **wzdłuż prostej łączącej te punkty** o wartości:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



- W postaci wektorowej siłą działająca na masę m_2 ze strony m_1:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



G = 6.673·10^{-11} N·m^2/kg^2 - stała grawitacyjna

GRAWITACJA – kilka obserwacji

- Na każde ciało znajdujące się w pobliżu Ziemi (lub innej planety) działa przyspieszenie grawitacyjne a_g. Pochodzi ono wyłącznie od siły grawitacyjnej działającej na to ciało.

$$F = m_1 a_g \qquad F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad a_g = G\frac{m_2}{r^2}$$

- Przyspieszenie grawitacyjne zależy zatem od wysokości ciała nad Ziemią:

Wysokość [km]		a_g [m/s^2]
0	(powierzchnia Ziemi)	9,83
8,8	(szczyt Mt. Everestu)	9,80
36,6	(największa wysokość załogowego lotu balonem)	9,71
400	(wahadłowiec kosmiczny na orbicie)	8,70
35 700	(satelita telekomunikacyjny)	0,225

- Ziemia nie jest ani jednorodna, ani kulista: wartość a_g nie jest takie sama na całej powierzchni Ziemi.
- Ziemia się obraca - przyspieszenie na równiku jest mniejsze niż na biegunach: $g = a_g - \omega^2 R$ $\qquad \omega^2 R = a_{dośr}$

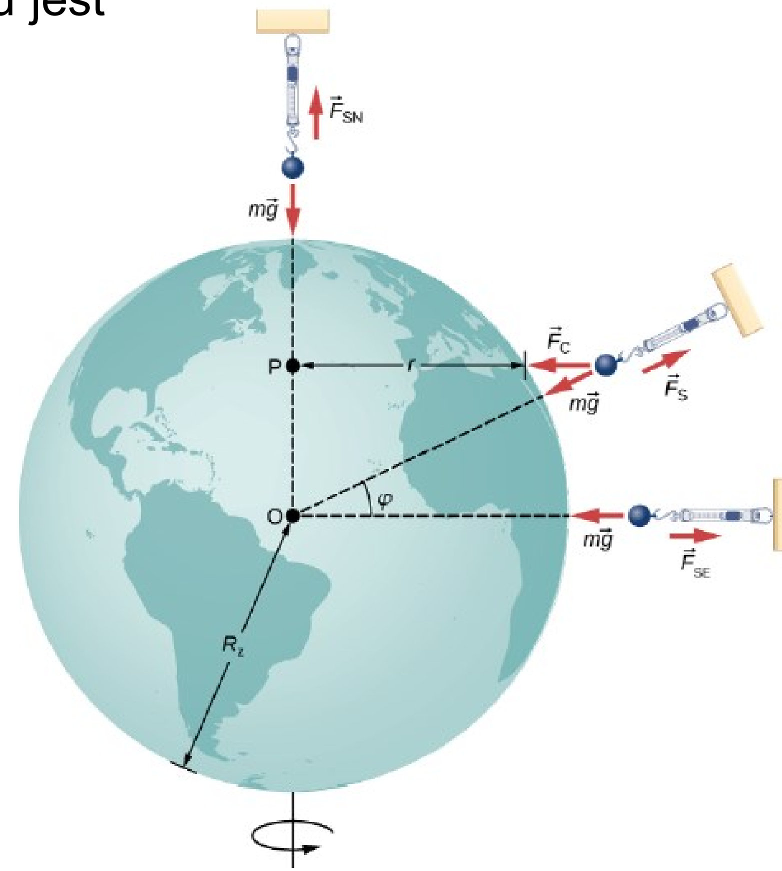
GRAWITACJA – kilka obserwacji

- Ziemia się obraca - przyspieszenie na równiku jest mniejsze niż na biegunach: $g = a_g - \omega^2 R$

- Przyspieszenie grawitacyjne g można związa z masą, gęstością i promieniem Ziemi:

$$\frac{GMm}{r^2} = mg$$

- W środku Ziemi (wewnątrz kuli o promieniu r) mamy:



$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} \qquad \rho(r) = \frac{M(r)}{V} = \frac{M(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

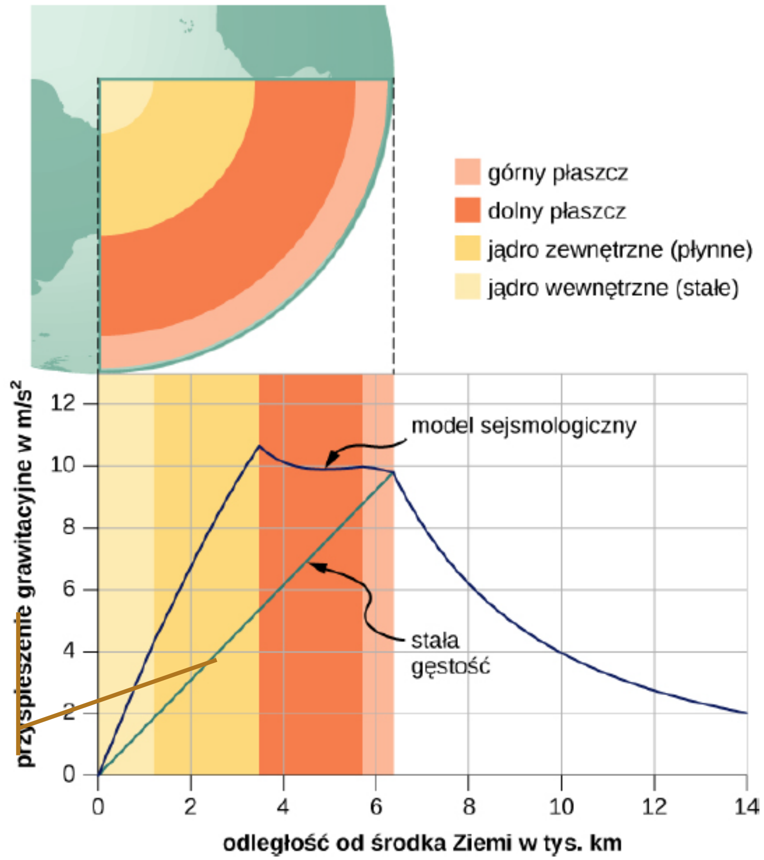
$$g = G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi\, \boldsymbol{r}$$

czyli wewnątrz Ziemi przyspieszenie rośnie liniowo z promieniem!

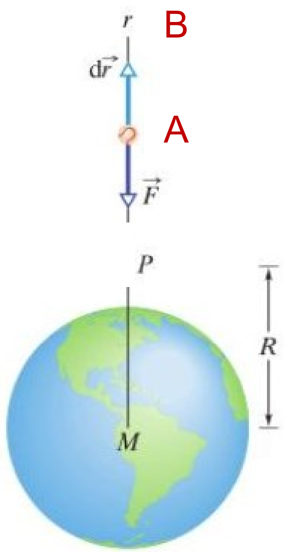
GRAWITACJA – kilka obserwacji

- Ziemia nie jest jednak jednorodna i przyspieszenie wyznaczane jest na podstawie modeli:

$$g = \frac{4}{3} G \rho \pi \boldsymbol{r}$$



Energia pola grawitacyjnego



- Pole grawitacyjne jest **potencjalne**.
- Zmiana energii potencjalnej $\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA}$ wyrażana jest jako praca (ze znakiem „-") wykonana przez pole przy zmianie położenia a z punktu **A** do **B** (p. Wykład 3):

$$E_{pB} - E_{pA} = -W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

- Jako punkt końcowy B przyjmujemy nieskończoną odległość: $\vec{r}_B \to \infty$, a $E_{pB} \to 0$:

$$\Delta E_p = 0 - E_{pA} = -W_{A\to\infty}$$

$$\cos\sphericalangle\left(\vec{F}(\vec{r}); d\vec{r}\right) = -1$$

liczymy:

$$W_{A\to\infty} = \int_{r_A}^{\infty} \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r} = -\int_{r_A}^{\infty} G\frac{m_1 m_2}{r^2} dr =$$

$$\int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r}$$

$$= +G m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_\infty} - \frac{1}{r_A}\right) = -G\frac{m_1 m_2}{r_A}$$

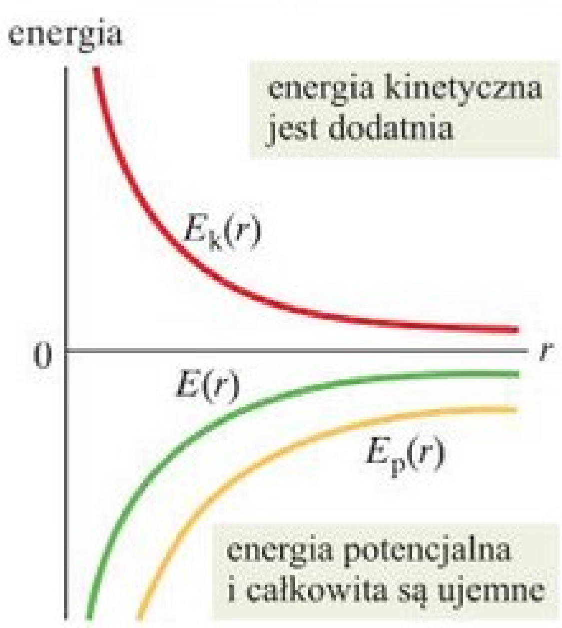
czyli: $\boxed{E_{pA}(r_A) = -G\frac{m_1 m_2}{r_A}}$!

Energia pola grawitacyjnego

- Pole grawitacyjne jest potencjalne. Siła grawitacyjna jest siłą zachowawczą (pamiętamy?). Oznacza to, że praca przy przeniesieniu ciała w polu grawitacyjnym jest niezależna od drogi, po jakiej to ciało zostało przemieszczone. Istotne jest jedynie położenie początkowe i końcowe.

- Energia potencjalna pola grawitacyjnego jest UJEMNA

$$E_{pA}(r_A) = -G\frac{m_1 m_2}{r_A}$$



- Energia całkowita ciała w polu grawitacyjnym jest zachowana:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_1 m_2}{r_A} = const$$

i również jest ujemna (ćw)!

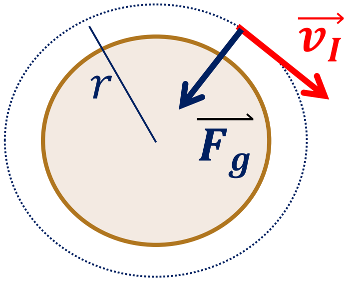
- Energia potencjalna a siła:

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

Ruchy planet i satelitów

- Satelita porusza się po stabilnej orbicie, gdy działa na niego siła grawitacyjna, która pełni rolę siły dośrodkowej:

$$\left.\begin{aligned} F_{dośr} &= F_g \\ \text{czyli:} \quad \frac{mv^2}{r} &= \frac{GMm}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad v_I = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$



- Jeśli satelita ma oddalić się do nieskończoności, to jego końcowa energia zbliży się do zera:

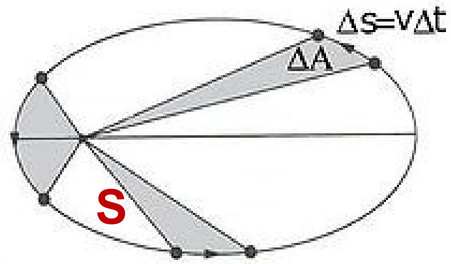
$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0$$

co daje wartość tzw. prędkości ucieczki: $v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

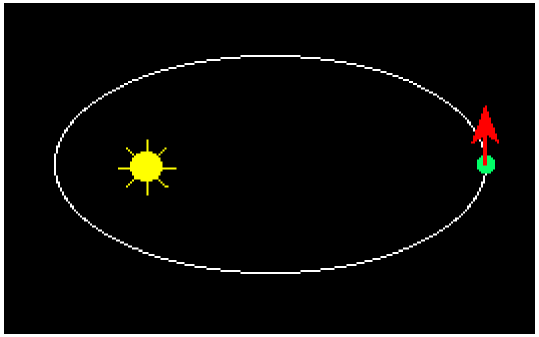
w przypadku Ziemi: $v_{II} = 11.2\frac{km}{s}$

Prawa Keplera (1619)

I. Wszystkie planety poruszają się po orbitach eliptycznych. W jednym z ognisk elipsy znajduje się Słońce.

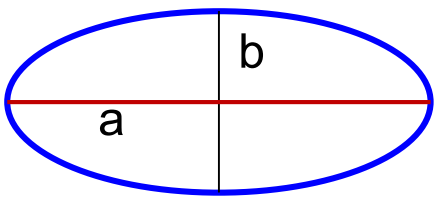


II. Promień wodzący planety zakreśla w równych odstępach równe pola.



III. Kwadraty okresów obiegu planet dookoła Słońca są proporcjonalne do sześcianów wielkich półosi elips:

$$\frac{T_1^{\,2}}{T_2^{\,2}} = \frac{a_1^{\,3}}{a_2^{\,3}}$$



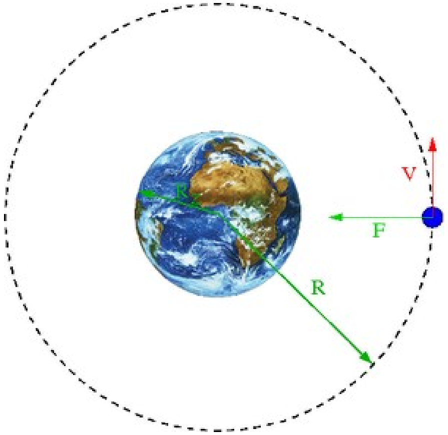
Są to prawa historyczne. Prawa Keplera wynikają wprost z zasad dynamiki Newtona.
Kepler opisał JAK PORUSZAJĄ SIĘ PLANETY, a Newton wyjaśnił dodatkowo DLACZEGO tak się poruszają (prawo powszechnego ciążenia, siła, ciężar, masa).

Ruchy planet

- III prawo Keplera jest konsekwencją prawa powszechnego ciążenia, gdzie rolę siły dośrodkowej pełni siła grawitacyjna:

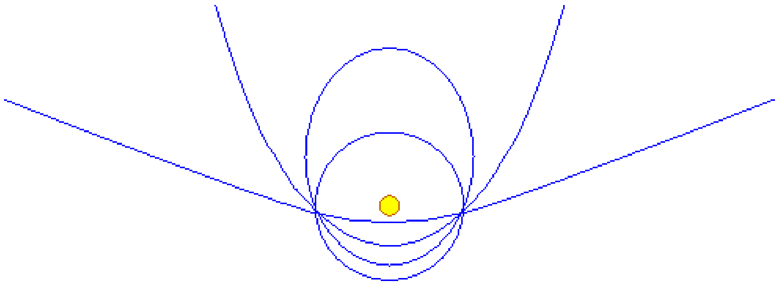
$$\boldsymbol{F_{do\acute{s}r}} = \boldsymbol{F_g}$$

$$m_1\omega^2 r = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = \frac{r_2^3}{T_2^2} \quad \text{lub} \quad \frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^3}$$

- I prawo Keplera wynika z rozwiązania równań ruchu masy w polu siły centralnej
  – w zależności od całkowitej energii i momentu pędu - torem może być okrąg, elipsa, parabola lub hiperbola



Ruchy planet

- II prawo Keplera wynika bezpośrednio z zasady zachowania momentu pędu:

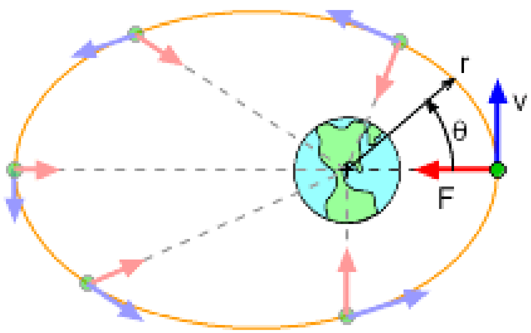
  Moment pędu jest zachowany, gdy znika moment siły działającej na ciało. Jest to możliwe, gdy:

  a) nie działa siła,

  $$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = const,$$

  $$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

  b) siła jest zawsze równoległa do promienia wodzącego, czyli np. dla **sił centralnych**:

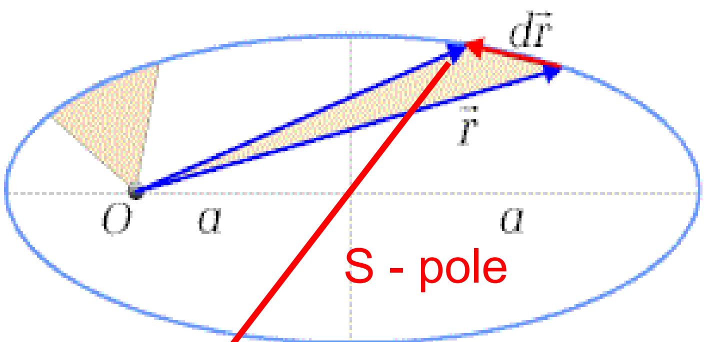


Jeżeli siła jest centralna: $\vec{F}_g = f(r)\vec{r}$, czyli $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = 0$

Ruchy planet

- II prawo Keplera wynika bezpośrednio z zasady zachowania momentu pędu:

Jeżeli siła jest centralna: $\vec{F}_g = f(r)\vec{r}$, czyli $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = 0$



$$\boxed{d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} \times d\vec{r}}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = const,$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \vec{r} \times \vec{v}dt$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m}\vec{L}$$

$$\boldsymbol{\frac{d\vec{S}}{dt} = \mathrm{const}}$$

- prędkość polowa jest stała,

Gdy moment pędu jest zachowany, ruch jest płaski, odbywa się w płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu pędu.

Ruch w polu sił centralnych jest płaski $(\vec{r}, \vec{v})$.

Płaskie galaktyki

OpenStax https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1