Podstawy fizyki – sezon 1

V. Pęd, zasada zachowania pędu, zderzenia

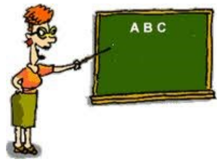
Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~amucha

Cele wykładu (pytania egzaminacyjne)

Wiedza:

- Pęd i II zasada dynamiki Newtona
- Zasada zachowania pędu i energii
- Rodzaje zderzeń
- Środek masy



Umiejętności:

- Obliczenia zmian pędu i energii w zagadnieniach związanych z rzutami i zderzeniami
- Wyznaczenie środka masy układów dyskretnych i ciągłych

Zasada zachowania energii

- Podsumujmy, co wiemy już o pracy, sile, energii kinetycznej i potencjalnej:
  - praca siły zachowawczej:

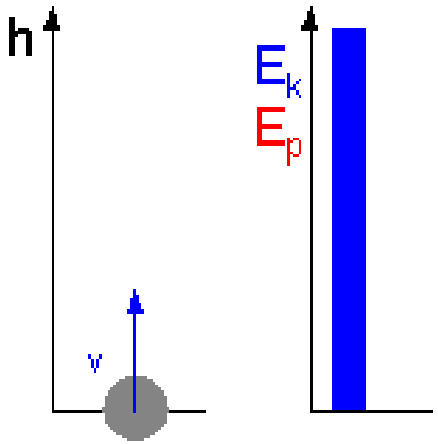
$$\boldsymbol{W_{AB}} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = E_{pA}(\vec{r}_A) - E_{pB}(\vec{r}_B) = -\Delta \boldsymbol{E_p}$$

  - tw. o pracy i energii (dowolna siła): $\boldsymbol{W_{AB} = E_{kB} - E_{kA}}$

czyli: $E_{kB} - E_{kA} = E_{pA} - E_{pB}$

lub: $E_{kB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{kA}$

z czego wynika: $\boxed{\boldsymbol{E = E_p + E_k = const}}$



Z.Kąkol

W polu sił zachowawczych
całkowita energia mechaniczna

jest zachowana

Pęd

- Rozważamy punkt materialny P, o masie m i prędkości $\vec{v}$, na który działa siła $\vec{F}$
- Siła działająca na punkt przez czas t powoduje zmianę jego pędu:

$$\int_0^t \vec{F} dt = \int_{v_0}^{v} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \mathrm{m}\vec{v}(\mathrm{t}) - \mathrm{m}\vec{v}_0 = \Delta\vec{p} \qquad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

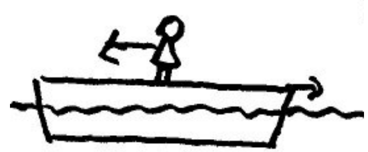
Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działajacych na ciało wynosi zero, to całkowity wektor pędu pozostaje stały.

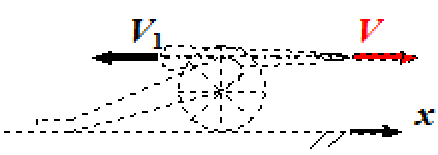
$$\sum \vec{F}_i = 0 \iff \vec{P} = const$$

Zasada zachowania pędu

Przykłady:

- ruch po łódce,
- armata,
- zderzenia,





Zderzenia

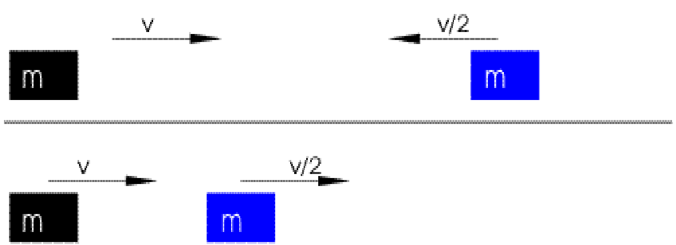
SPRĘŻYSTE

Zas. zach. pędu (3 równania):

$$\left(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}\right)_{przed}=\left(\overrightarrow{p'_1}+\overrightarrow{p'_2}\right)_{po}$$

Zas.zach.energii

$$E_{K1}+E_{K2}=E'_{K1}+E'_{K2}$$



z dwóch zas.zachowania (energii i wektora pędu) można policzyć prędkość po zderzeniu, np., gdy masy są równe, ciała „wymieniły się” prędkościami

NIESPRĘŻYSTE

Zas. zach. pędu (3 równania):

$$\left(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}\right)_{przed}=\left(\overrightarrow{p'_1}+\overrightarrow{p'_2}\right)_{po}$$

$$\left(\sum E_{kin}\right)_{przed}=\left(\sum E'_{kin}\right)_{po}+\Delta E$$

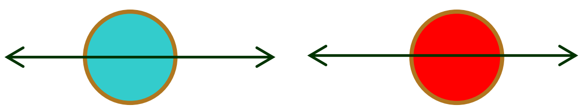
stracona energia na odkształcenia, ogrzanie,itp

wystarczy zas. zach pędu, aby obliczyć parametry ruchu po zderzeniu

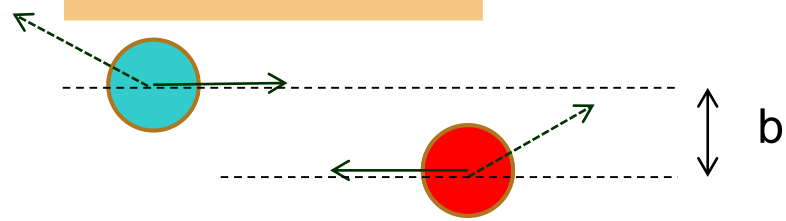
http://en.wikipedia.org/wiki/Collision

Zderzenia niecentralne

CENTRALNE

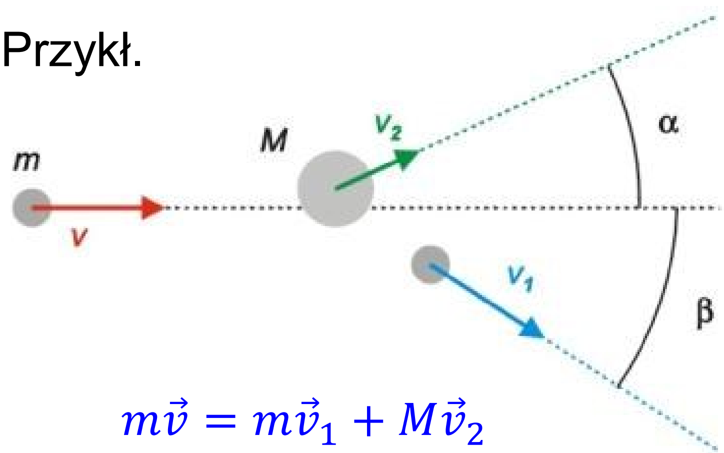


NIECENTRALNE



Środki kul nie leżą na prostej przechodzącej przez kierunek ruchu pierwszej kuli

Przykł.



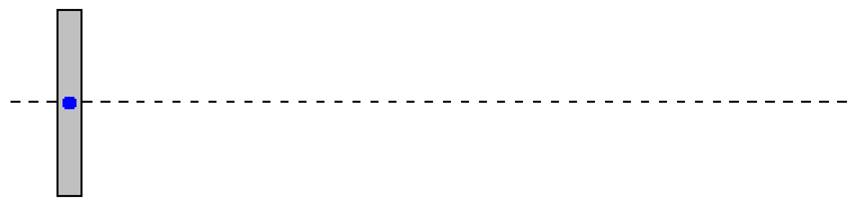
$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2$$

- gdy kule są o tej samej masie (bilard)- po zderzeniu poruszają się pod kątem prostym względem siebie,
  a kąty α i β zależą od parametru zderzenia b (odległości między pierwotnym kier, a środkiem kuli spoczywającej) (sprawdzić!)

Środek masy

- Dotychczas ciała opisywane były jako punkty materialne, tzn. obdarzone masą bezwymiarowe cząstki.
- Ciała rzeczywiste poruszać się mogą w sposób bardziej skomplikowany niż punkty materialne:



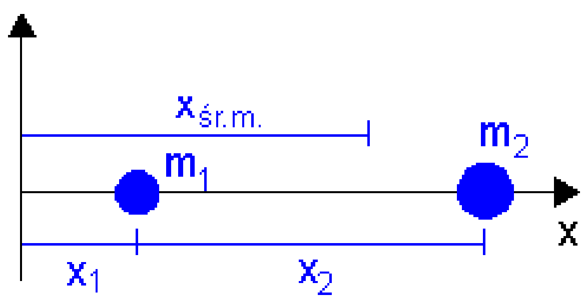
Z.Kąkol

- Jest jednak jeden punkt, którego ruch możemy opisać poznanymi zasadami:

ŚRODEK MASY

$$\vec{R}_{ŚM} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

położenie środka masy



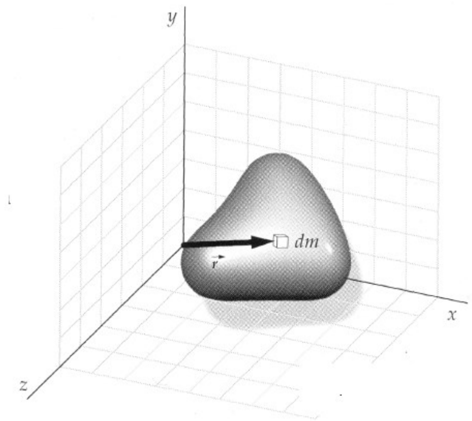
$$X_{ŚM} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Środek masy – jak znaleźć?

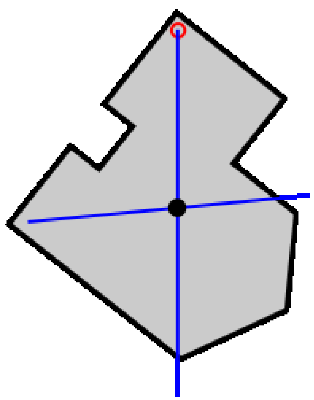
- Dla ciał o budowie ciągłej:

ŚRODEK MASY

$$\vec{R}_{ŚM} = \frac{\int \vec{r}dm}{M}$$



Uwaga!
Jeżeli pole sił ciężkości jest jednorodne (g=const), to położenie środka masy pokrywa się z położeniem środka ciężkości (położenie wypadkowej sił ciężkości działających na cały układ mas)



Środek masy można:

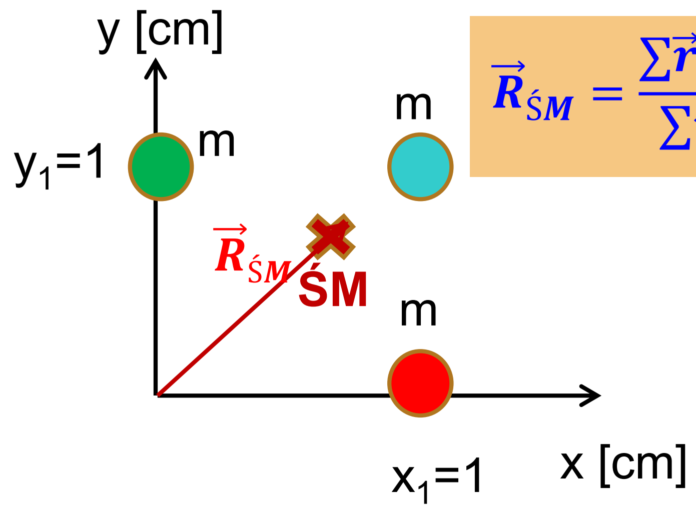
- obliczyć (dla ciał o prostej geometrii)
- wyznaczyć doświadczalnie – zawieszamy ciało w dwóch punktach, rysujemy pionową linię, miejsce przecięcia jest środkiem masy

Środek masy – obliczenia

Przykł 1. Oblicz $\vec{R}_{ŚM}$ układu mas z rys.

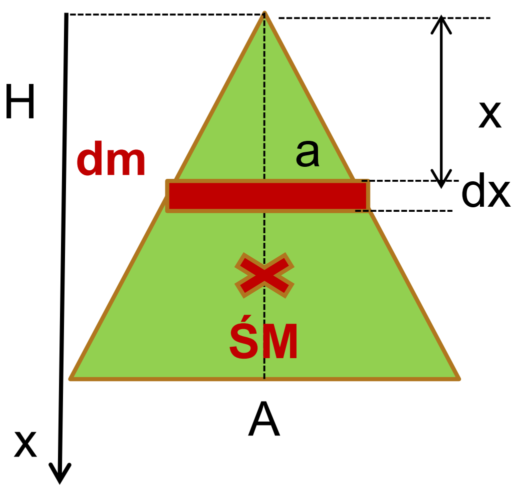
$$x_{ŚM} = \frac{mx_1 + mx_1 + m\cdot 0}{3m} = \frac{2}{3}x_1 = \frac{2}{3}cm$$

$$y_{ŚM} = \frac{my_1 + my_1 + m\cdot 0}{3m} = \frac{2}{3}y_1 = \frac{2}{3}cm$$



$$\vec{R}_{ŚM} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}$$

Przykł 2. Obl. współrzędne środka masy jednorodnego trójkąta o masie M, gęstości σ



$$x_{ŚM} = \frac{1}{M}\int x\, dm$$

$$dm = \sigma\, a\, dx, \qquad \sigma = \frac{M}{\frac{1}{2}AH}, \qquad \frac{a}{x} = \frac{A}{H}$$

$$x_{ŚM} = \frac{1}{M}\int_0^H \frac{2M}{AH}\frac{x\,A}{H}x\,dx = \int_0^H \frac{2}{H^2}x^2\,dx = \frac{2}{3H^2}x^3\Big|^H = \frac{2}{3}H$$

Ruch środka masy

- Prędkość środka masy:

$$\vec{V}_{ŚM} = \frac{d\vec{R}_{ŚM}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{v}_i m_i}{\sum m_i}$$

Jeżeli suma sił zewnętrznych wynosi zero (czyli pęd jest zachowany), to:

$$\vec{V}_{ŚM} = const$$

- Przyspieszenie środka masy:

$$\vec{a}_{ŚM} = \frac{d\vec{v}_{ŚM}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\sum \vec{v}_i m_i}{\sum m_i} = \frac{\sum \vec{a}_i m_i}{\sum m_i}$$

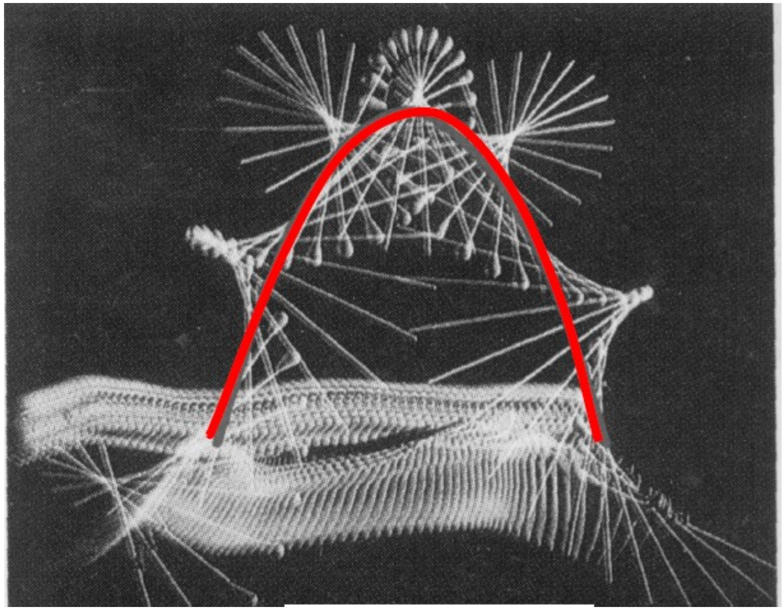
$\sum \vec{a}_i\, m_i = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_{zew}$ (II zas. dyn)

Środek masy układu punktów materialnych porusza się w taki sposób, jakby cała masa układu była skupiona w środku masy i wszystkie siły były do niego przyłożone

Dynamika układu punktów

- Jeśli wypadkowa siła zewnętrzna wynosi zero, to dla układów o stałej masie, środek masy pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostolinioniowym. (I zas. dynamiki Newtona)
- Przyspieszenie środka masy jest określone przez siłę zewnetrzną (II zas.dyn.)
- Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ wynosi zero, to całkowity wektor pędu jest zachowany (zas.zach. pędu)

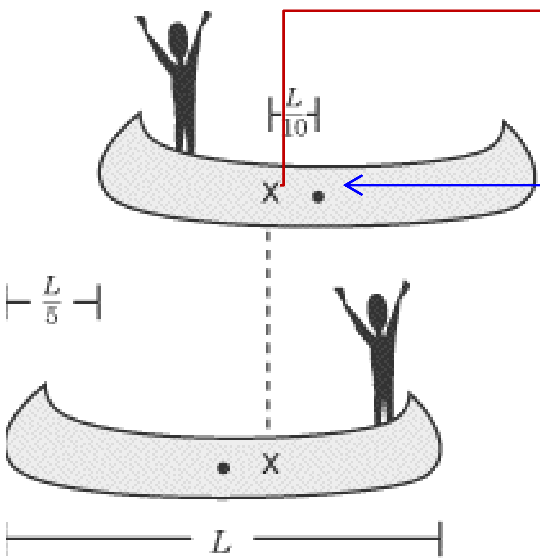
Rys. przedstawia ruch metalowego pręta rzuconego w górę – pręt wykonuje skomplikowane ruchy, ale środek masy porusza się po paraboli



http://cmf.p.lodz.pl/posmykiewicz/

Ruch środka masy - przykłady

Przykł. 3: Człowiek (o masie $m/4$) przeszedł po łódce (masa m) z dziobu na rufę. O jaką odległość przesunęła się łódka?



x- środek masy układu człowiek-łódka,

środek masy łódki jest w ½ L

przed zmianą:

$$x_{śm,1} = \frac{\frac{m}{4}\cdot 0 + m\frac{L}{2}}{m+\frac{m}{4}} = \frac{2}{5}L$$

po zmianie:

$$x_{śm,2} = \frac{\frac{m}{4}L + m\frac{L}{2}}{m+\frac{m}{4}} = \frac{3}{5}L$$

nie działa żadna siła zewnętrzna – środek masy układu powinien pozostać w spoczynku, czyli łódka przesuneła się o odcinek $1/5\ L$