Podstawy fizyki – sezon 1
III. Praca i energia

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFIiS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,
D11, pok. 106
amucha@agh.edu.pl
http://home.agh.edu.pl/~amucha

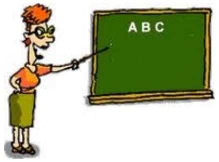
Cele wykładu (pytania egzaminacyjne)

Wiedza:

- Siła wykonuje pracę
- Twierdzenie o pracy i energii.
- Moc.
- Zasada zachowania energii całkowitej.
- Siły niezachowacze.
- Energia potencjalna i zasada zachowania energii mechanicznej.
- Potencjał, gradient pola.

Umiejętności:

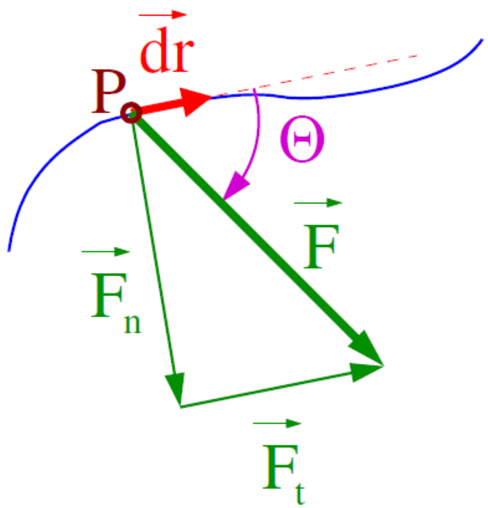
- Obliczenie pracy sił stałych i wybranych zmiennych (sprężystości, grawitacyjnej).
- Wyznaczenie pracy sił niezachowawczych w oparciu o twierdzenie o pracy i energii.
- Przykłady zastosowania zasady zachowania energii mechanicznej.



Praca

- Rozważamy punkt materialny P, na który działa siła $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v}, \dots)$
- Praca, jaką wykonuje siła $\vec{F}$ przy przesunięciu P o $\overrightarrow{dr}$:

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}$$



F.Żarnecki

Siły prostopadłe do przesunięcia nie wykonują pracy.

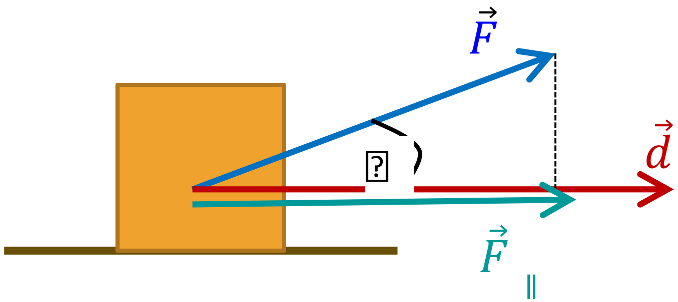
- siła dośrodkowa, siła Coriolisa, Lorentza…

Praca wykonana przez siłę $\vec{F}$ nad punktem P przy przesunięciu z punktu A do B wynosi:

$$\boxed{W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr}}$$

Praca siły stałej

Jeśli na punkt P działa siła **stała**, to jej praca przy przemieszczeniu $\vec{d}$ wynosi:



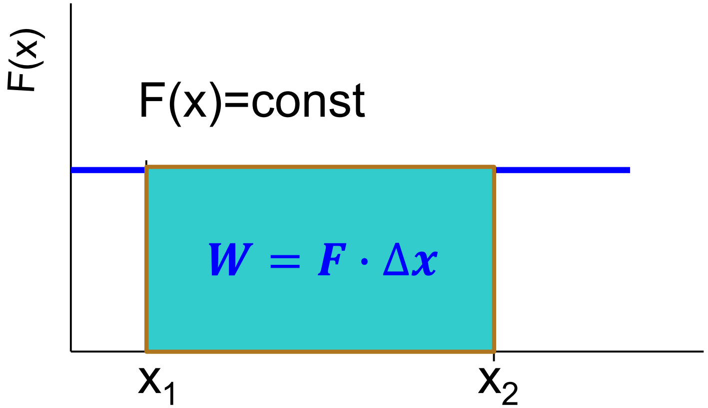
$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

[J=N m]

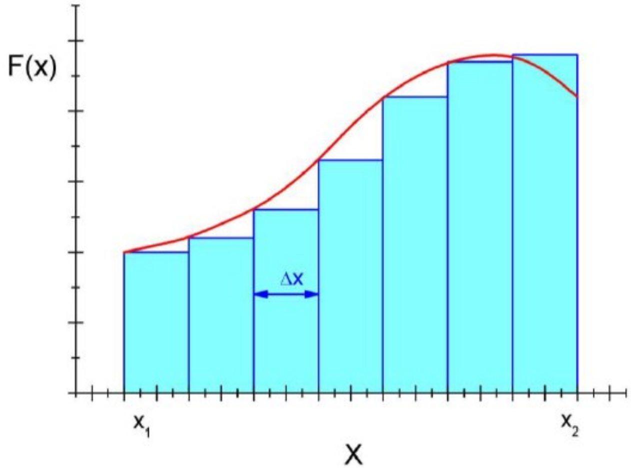
$$\boldsymbol{W = F\, d \cos\sphericalangle(\vec{F}, \vec{d}) = F_{\parallel}\, d}$$

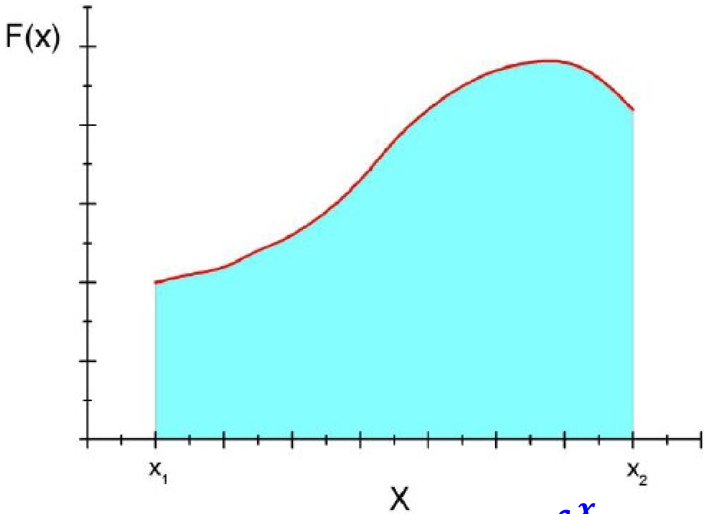
- Wzór określa pracę wykonaną wyłącznie przez siłę $\vec{F}$.
- Na ciało mogą działać również inne siły, np. siła tarcia, ciężar.
  - Praca wypadkowej kilku sił jest równa sumie prac wykonanych przez poszczególne siły.
- Ciało może przemieszczać się w innym kierunku niż działa siła (np. przy rzucie w górę siła grawitacyjna działa w dół – jej praca jest ujemna).

Praca siły zmiennej a stałej



- Praca jest polem powierzchni pod wykresem siły.
  - W przypadku siły stałej jest to prostokąt.
  - Dla siły zmiennej – dzielimy wykres na jak największą liczbę prostokątów i sumujemy pola





$$W = \sum F_i \Delta x$$

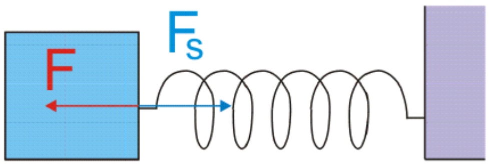
$$W = \lim_{i} \sum F_i \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

Z.Kąkol

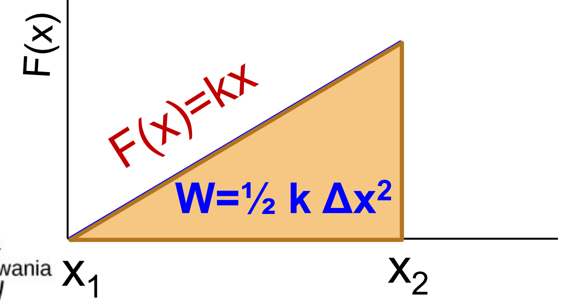
Praca sił zmiennych - przykłady

Przykł. 1 – Praca siły sprężystości: $F_s(x) = -kx$.
Rozciągamy sprężynę, liczymy pracę, jaką wykona zewnętrzna siła $F = kx$:

Z.Kąkol



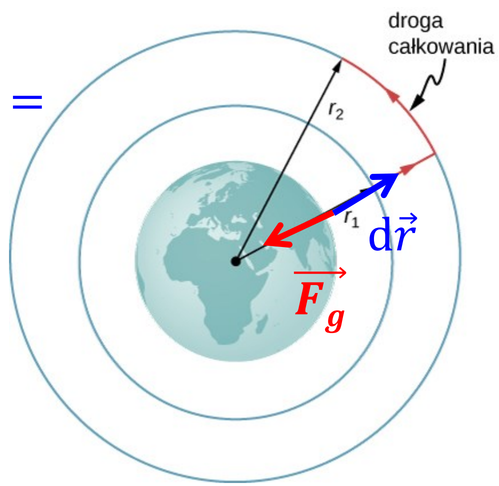
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

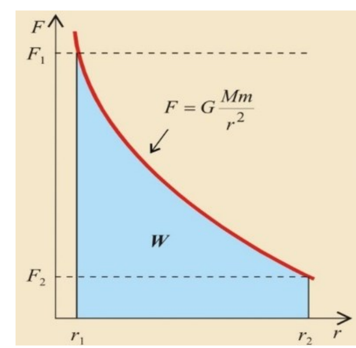


Przykł. 2 – Praca siły grawitacji:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r)\overrightarrow{dr} = -\int_{r_1}^{r_2} GMm\frac{1}{r^2}dr =$$

$$= GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$





A.Obłąkowska-Mucha

Energia kinetyczna (przyp. nierelatywistyczny)

Na ciało działa wypadkowa siła F i nadaje mu przyspieszenie a. Liczymy pracę tej siły nad ciałem (ruch wzdłuż osi x, m=const):

$$\boldsymbol{W} = \int \boldsymbol{F}\, \boldsymbol{dx} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt}\, \mathrm{dx} = \int_{x_1}^{x_2} m \frac{dv}{dt}\, dx = \int_{v_1}^{v_2} m\, v\, dv =$$

$$= \frac{1}{2} m {v_2}^2 - \frac{1}{2} m {v_1}^2 = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

gdzie zdefiniowano **energię kinetyczną**: $\boldsymbol{E_K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}}$

oraz pokazano, że:

zmiana energii kinetycznej ciała jest równa pracy W, jaką wykonuje wypadkowa siła nad tym ciałem.

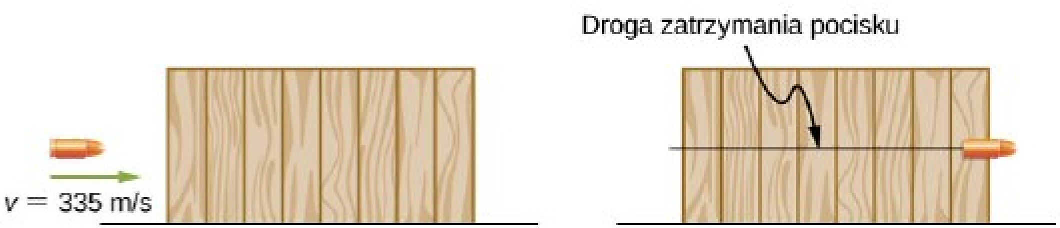
Twierdzenie o pracy i energii.

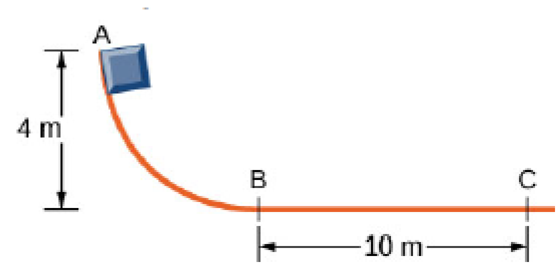
Twierdzenie jest prawdziwe niezależnie od postaci siły $\vec{F}$ i drogi.

Twierdzenie o pracy i energii - przykłady

- Tw. o pracy i energii najczęściej stosujemy, gdy mamy podany SKUTEK działania siły, np. ciało przyspieszyło, zatrzymało się pod wpływem tarcia.
- Tw. o pracy i energii pozwala policzyć pracę sił oporu bez znajomości postaci siły, a z wykorzystaniem zmiany energii kinetycznej:

$$W_{op} = -F\,s = E_{k2} - E_{k1}$$





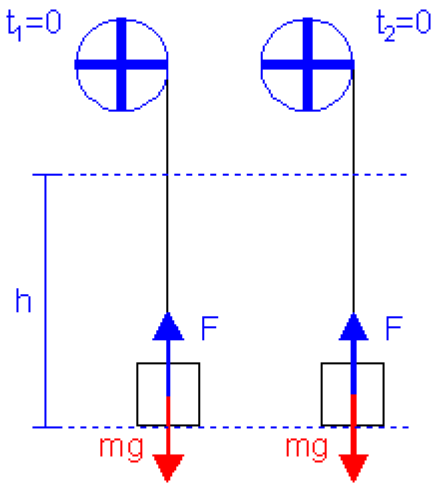
- Tw. o pracy i energii prowadzi do zasady zachowania energii mechanicznej.

- Jeśli interesuje nas szybkość wykonania pracy, określamy **MOC**:

$$P = \frac{dW}{dt}$$ - moc chwilowa [W=J/s], [kWh]

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$ - moc średnia

dla stałej siły: $\bar{P} = \frac{F\,s}{t} = F\,\bar{v}$



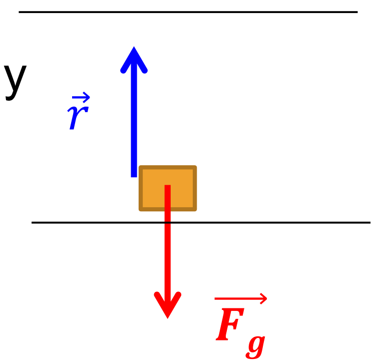
Z.Kąkol

Siły zachowawcze

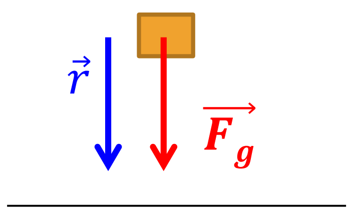
- Jeżeli praca pewnej siły zależy tylko od położenia punktu początkowego A i końcowego B, to siłę taką nazywamy **ZACHOWAWCZĄ**.

Praca takiej siły, wykonana po drodze zamkniętej **WYNOSI ZERO**.

Przykł: Liczymy pracę siły grawitacji (w poblizu Ziemi, czyli F_g=mg, przy podnoszeniu i opuszczaniu ciała na wysokość y:

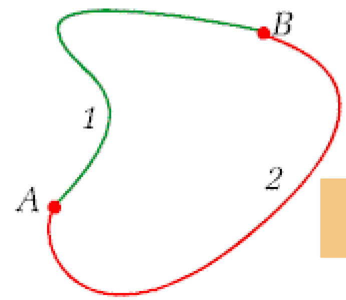


$$W_1 = -mgy$$



$$W_2 = mgy$$

$$\boxed{W_1 = -W_2}$$



$$\boxed{\boldsymbol{W_{AB} + W_{BA} = 0}}$$

- Siłami zachowawczymi są np:
  - siła grawitacji
  - siła sprężystości

Siła tarcia jest siłą niezachowawczą.

Energia potencjalna

- Siła jest zachowawcza, gdy jest ona funkcją jedynie położenia ciała: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, taką, że jej pracę można przedstawić w postaci:

$$\boldsymbol{W_{AB}} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = E_{pA}(\vec{r}_A) - E_{pB}(\vec{r}_B) = \boldsymbol{-\Delta Ep}$$

gdzie ΔE_p - zmiana energii potencjalnej

- Siła zachowawcza nie może zależeć ani od czasu, ani od prędkości.

- Energia potencjalna jest skalarną funkcją położenia $\vec{r}$.
- Jest to energia, jaką posiada ciało w polu danej siły $\vec{F}$.

$$E_{pB} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} + E_{pA}$$

- Wartość energii potencjalnej jest określona z dokładnością do pewnej stałej, zależnej od wyboru punktu odniesienia A.

$$E_{pB} = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} + const$$

Energia potencjalna

- Ustalmy jeden z punktów, np. A, tak, aby $E_{pA} = 0$.

  Energia potencjalna wynosi zero w położeniu, gdy $\vec{F}_A = 0$ (nierozciągnięta sprężyna, nieskończona odległość od Ziemi.
- Otrzymujemy zależność energii potencjalnej od siły:

$$Ep_B = -\int_A^B \vec{F}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r}$$

czyli:

$$-\frac{dEp}{d\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

Bardziej ogólnie:

praca wykonana przez siłę $\vec{F}(\vec{r})$ przy przesunięciu $\mathrm{d}\vec{r} = (dx, dy, dz)$ wynosi:

$$dW = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dr} = -dEp$$

$$= -\frac{\partial Ep}{\partial x}dx - \frac{\partial Ep}{\partial y}dy - \frac{\partial Ep}{\partial z}dz$$

czyli:

$$\boxed{\overrightarrow{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{Ep}}$$

∇- operator różniczkowy-nabla

Natężenie a potencjał

- W 3D - analogia do poziomic ($V = const$) linii spadku lawin $\vec{E}$

$$\vec{E}(r) = \left[-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}\right]$$

$$\boxed{\vec{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\, \boldsymbol{V}}$$

$\boldsymbol{\nabla}$ - gradient

Gradient potencjału oznacza kierunek spadku wektora natężenia pola

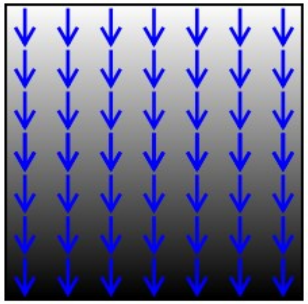
a poprzednio było:

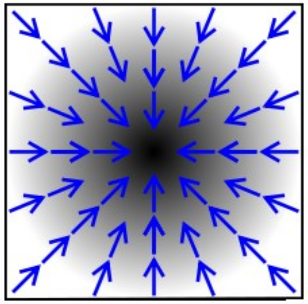
$$\boxed{\boldsymbol{V} = -\int_{A}^{B} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{r}}}$$

Operatory wektorowe*

- Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni istnieje określona wielkość wektorowa (np.siła, natężenie), to mówimy o takim polu wektorowe. Np. pole grawitacyjne jest polem wektorowym.
- Do opisu pól wektorowych służą operatory wektorowe:
  - gradient: $grad\ f(x,y,z) \equiv \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
  - dywergencja
  - rotacja
- **Gradient** wielkości skalarnej jest wektorem, który pokazuje spadek (lub narastanie) tej wielkości w określonym kierunku.
- W polu grawiatcyjnym – siła jest wielkością (wektorem) pokazującą, jak szybko i w jakim kierunku zmienia się energia potencjalna (skalar)

$$\vec{F} = -\nabla Ep$$





Ciemniejszy kolor pokazuje większą wartość pewnewgo skalara (np. E_p lub temp), strzałki pokazują kierunek narastania tego skalara (uwaga na „-”)

Zasada zachowania energii

- Podsumujmy, co wiemy już o pracy, sile, energii kinetycznej i potencjalnej:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = E_{pA} - E_{pB}$$ - praca siły zachowawczej

$$W_{AB} = E_{kB} - E_{kA}$$ - tw. o pracy i energii (dowolna siła)

czyli:

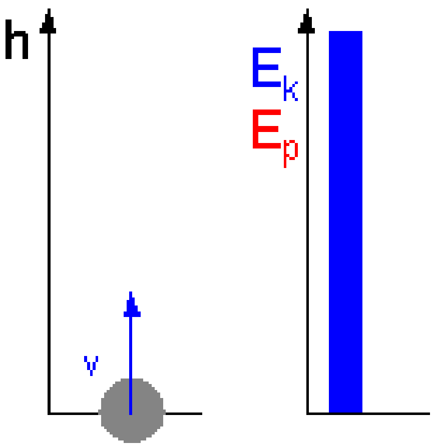
$$E_{kB} - E_{kA} = E_{pA} - E_{pB}$$

lub:

$$E_{kB} + E_{pB} = E_{pA} + E_{KA}$$

z czego wynika: $$\boxed{\boldsymbol{E = E_{pA} + E_k = const}}$$

W polu sił zachowawczych całkowita energia jest zachowana



Z.Kąkol

Siła, energia - przykłady

Przykł 1. Wyznaczenie energii potencjalnej w pobliżu Ziemi:

$$F(y) = -mg$$

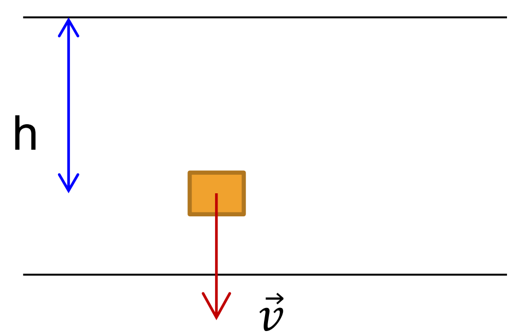
F jest stała. Przyjmujemy, że dla $y = 0, Ep(0) = 0$.
Wtedy

$$E_p(y) = -\int_0^y F(y)\mathrm{d}y + E_p(0) = -\int_0^y (-mg)\mathrm{d}y = mgy$$

Sprawdzenie

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p(y)}{\mathrm{d}y} = -\frac{\mathrm{d}(mgy)}{\mathrm{d}y} = -mg$$

Przykł 3. Spadek swobodny z wysokości *h*

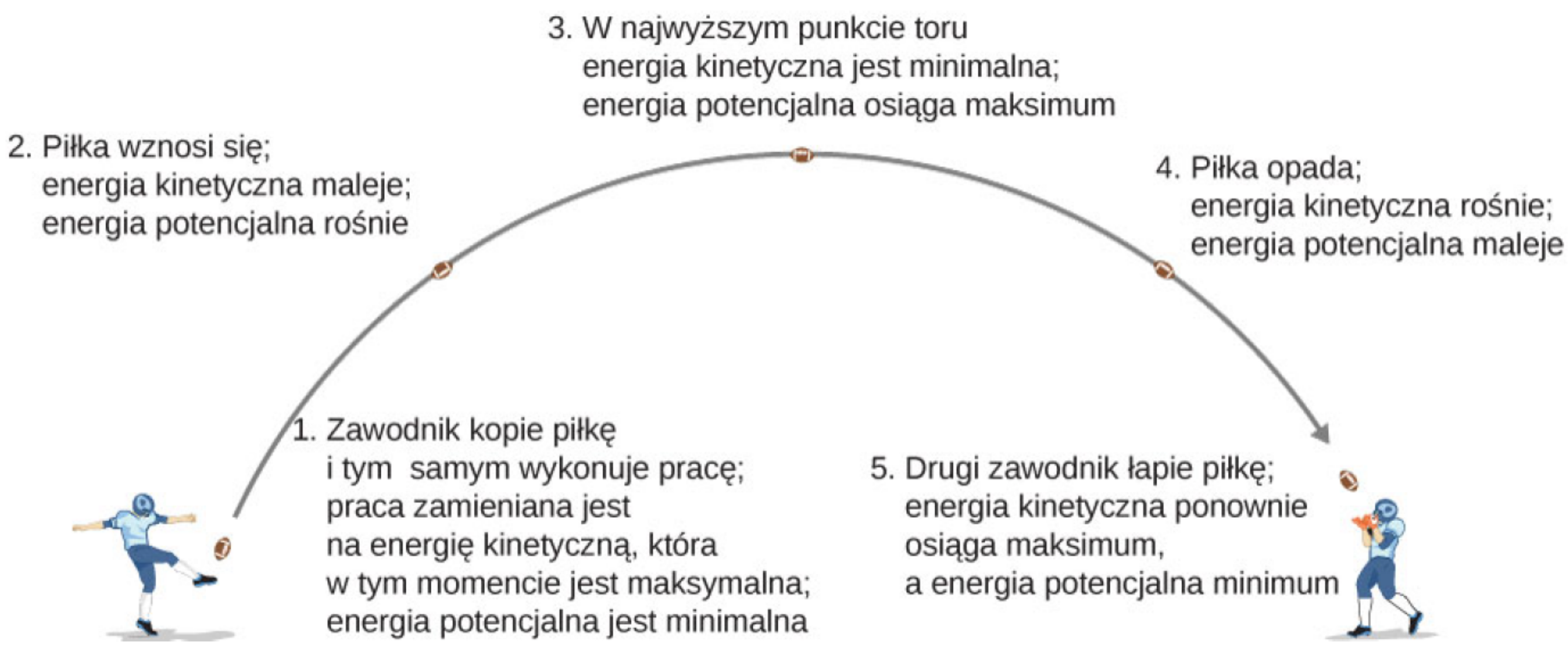


$$\Delta E_k = -\Delta Ep$$

$$\frac{mv^2}{2} = mgh$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

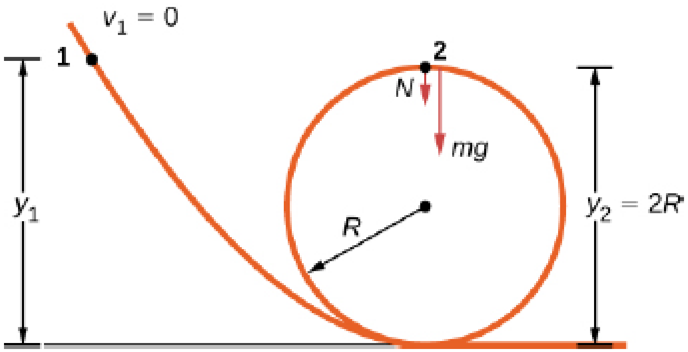
Zasada zachowania energii - przykłady

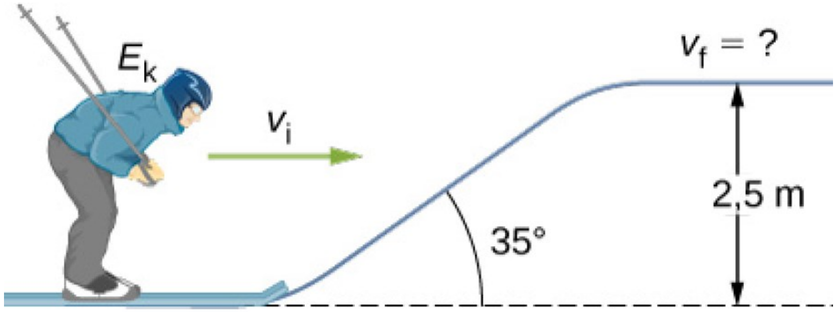


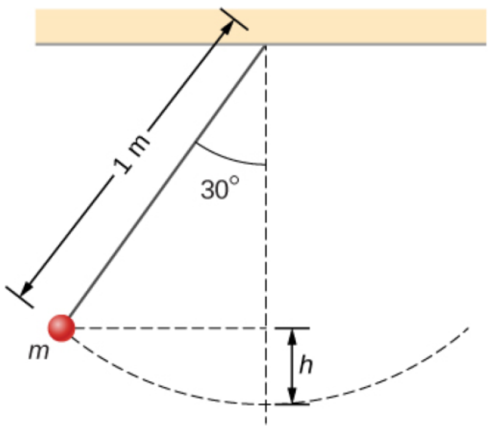
Ten podręcznik OpenStax jest dostępny za darmo pod https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

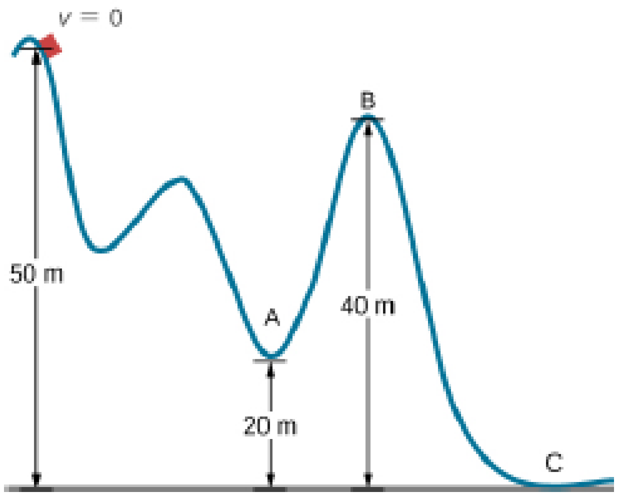
Zasada zachowania energii - przykłady

https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/openagh-podreczniki_view.php?mode=view&categId=1&handbookId=60&moduleId=173









Ten podręcznik OpenStax jest dostępny za darmo pod https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

Energia potencjalna pola grawitacyjnego

Uwaga!

Przyjmowane było, siła grawitacyjna w pobliżu Ziemi jest stała $F(y) = -mg$

Teraz znajdziemy energię potencjalną masy *m* znajdującej się w dowolnym punkcie nad powierzchnią Ziemi odległym o *r* od środka Ziemi.

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GMm\frac{1}{r^2}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Znak „-” oznacza kierunek do środka Ziemi, siła przyciągająca.

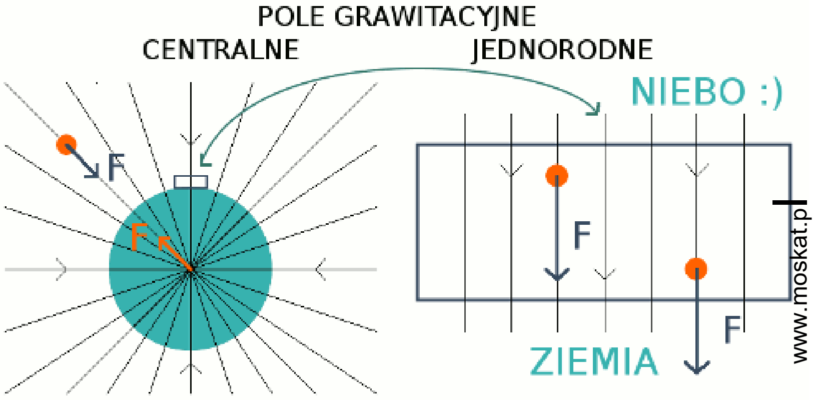
$$E_{pB} = -W_{AB} + E_p(A)\ , \quad A \to \infty,\ B \to r$$

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}(\vec{r})\, \mathrm{d}\vec{r} + Ep_{\infty}\,, \qquad Ep_{\infty} \to 0$$

$$E_p(r) = -\int_{\infty}^{r} F(r)dr = \int_{r}^{\infty}\left(-GMm\frac{1}{r^2}\right)dr =$$

$$= -GMm\frac{1}{r}\bigg|_{r}^{\infty} = -GMm\frac{1}{r}$$

uwaga na zmianę granic całkowania i zwroty wektorów!



Energia potencjalna, potencjał

Energia potencjalna ma wartość równo zeru w nieskończoności (punkt odniesienia) i maleje w miarę zmniejszania się *r*.

$$\boxed{E_p(r) = -GMm\frac{1}{r}}$$

Potencjał pola grawitacyjnego: $$V(r) = \frac{E_p(r)}{m} = -GM\frac{1}{r}$$

Przykł: Obliczyć jaką prędkość należy nadać obiektowi na Ziemi aby uciekł on z Ziemi na zawsze.

$$E_K + Ep(R_Z) = Ep(R_Z \to +\infty)$$

$$\frac{1}{2}m{v_{II}}^2 - GM_Z m\frac{1}{R_Z} = 0$$

$$v_{II} = \sqrt{2\,GM_Z\frac{1}{R_Z}} \cong 11.2\ km/s$$

jest to tzw. prędkość ucieczki – druga prędkość kosmiczna

Pierwsza prędkość kosmiczna - *najmniejszą* możliwą prędkość jaką musi mieć punkt materialny swobodnie krążący po orbicie wokół Ziemi.

Energia dla sił niezachowawczych

- W układach oprócz sił zachowawczych działają zwykle siły niezachowawcze, np. tarcie.
  - twierdzenie o pracy i energii, dla wszystkich sił: $\Delta E_k = Wz + Wnz$
  - a dla sił zachowawczych: $W_z = -\Delta Ep$
  - czyli: $W_{nz} = \Delta E_k + \Delta Ep$

praca sił niezachowawczych została przekształcona w energię wewnętrzną U.

Zmiana energii wewnetrznej U jest równa staconej energii mechanicznej:

$$\boldsymbol{\Delta E_k + \Delta Ep + \Delta U = 0}$$

Zasada zachowania energii całkowitej!

Zasada zachowania energii należy do najbardziej podstawowych praw fizyki. Wszystkie nasze doświadczenia pokazują, że jest to prawo bezwzględnie obowiązujące; nie znamy wyjątków od tego prawa.

Zasada zachowania energii całkowitej

- Jeżeli na ciało działa siła zewnętrzna (dowolna), siła zachowawcza (np. grawitacji) oraz niezachowawcza (np.tarcia), to można napisać:

$$F_{wyp} = Fzew + Fz + Fnz$$

a z tw. o pracy i energii: $\Delta E_K = Wzew + Wz + Wnz$

czyli: $\Delta EK = W_{zew} - \Delta Ep - \Delta U$

$$\boxed{\boldsymbol{W_{zew} = \Delta E_k + \Delta Ep + \Delta U}}$$

Praca siły zewnętrznej a zasada zachowania energii całkowitej

- Każda praca wykonana na ciele przez czynnik zewnętrzny równa się wzrostowi energii kinetycznej plus wzrost energii potencjalnej plus wzrost energii wewnętrznej.
- *Cała energia została zarejestrowana.*
- Wynika z niego, że *energia może być przekształcona z jednej formy w inną, ale nie może być wytwarzana ani niszczona*;

Energia całkowita jest wielkością stałą.

Podsumowanie

- Praca siły zmiennej i stałej (grawitacji, sprężystości).
- Energia kinetyczna.
- Moc.
- Siły zachowawcze.
- Energia potencjalna.
- Zasada zachowania energii mechanicznej.
- Gradient.
- Potencjał.
- Pole grawitacyjne.
- Zasada zachowania energii całkowitej (w przypadku działania sił niezachowawczych oraz zewnętrznych)