

# Podstawy fizyki – sezon 1

## **V. Ruch obrotowy (!)**

Agnieszka Obłąkowska-Mucha

WFliS, Katedra Oddziaływań i Detekcji Cząstek,  
D11, pok. 111  
amucha@agh.edu.pl  
<http://home.agh.edu.pl/~amucha>

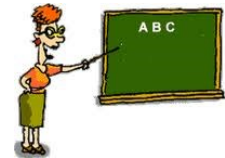
# Cele wykładu (pytania egzaminacyjne)

## Wiedza:

- ▶ Ruch po okręgu jest przykładem ruchu krzywoliniowego.
- ▶ Prędkość i przyspieszenie w ruchu po okręgu – związek z ruchem prostoliniowym.
- ▶ Zasady dynamiki w ruchu obrotowym, moment siły.
- ▶ Moment bezwładności.

## Umiejętności:

- ▶ Wyznaczenie prędkości i przyspieszeń w ruchu obrotowym.
- ▶ Obliczenia momentu bezwładności dla prostych układów.
- ▶ Wpływ wyboru osi obrotu na dynamikę w ruchu obrotowym.
- ▶ Zastosowania zasad zachowania energii i momentu pędu do wyjaśnienia obserwowanych zjawisk.



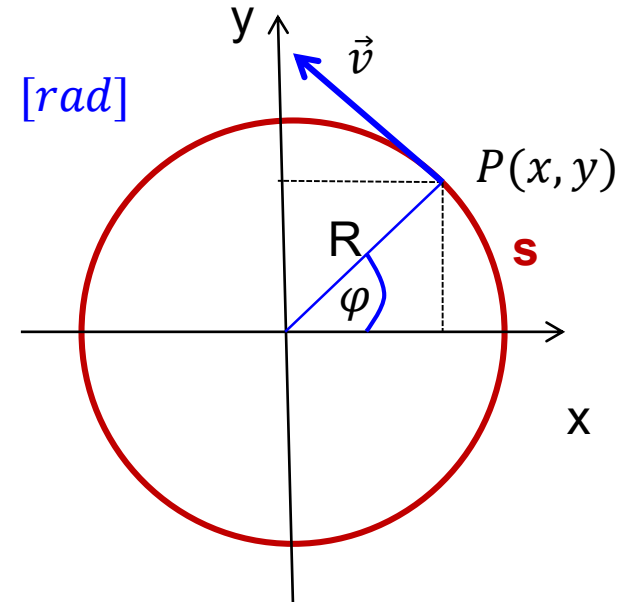
# Kinematyka ruchu po okręgu

- ▶ Ruch punktu P po okręgu jest złożeniem ruchu w dwóch kierunkach:

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \varphi \\ y(t) = R \sin \varphi \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{s}{R} [\text{rad}]$$

- ▶ Ruch jednostajny po okręgu – w pewnym przedziale czasu t, punkt przebywa ten sam łuk (ten sam kąt)



**Prędkość kątowa** jest stała:



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \left[ \frac{1}{s} \right]$$

$$\begin{cases} x(t) = R \cos \omega t \\ y(t) = R \sin \omega t \end{cases}$$

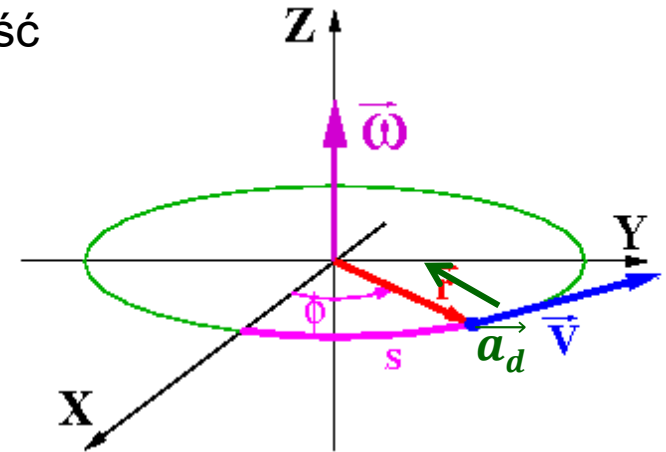
$$\begin{cases} v_x(t) = -R\omega \sin \omega t \\ v_y(t) = R\omega \cos \omega t \end{cases}$$

$$\omega = \frac{d s}{dt R} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

zależność pomiędzy prędkością kątową a liniową

# Ruch jednostajny po okręgu

- ▶ Prędkość liniowa  $\vec{v}$  jest wektorem, czyli prędkość kąтова  $\vec{\omega}$  też jest wektorem:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
- ▶ Parametry ruchu jednostajnego po okręgu:
  - Okres  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  [s],
  - częstotliwość  $f = \frac{1}{T}$  [Hz]



- ▶ **Przyspieszenie dośrodkowe** – związane ze zmianą kierunku wektora  $\vec{v}$

$$\begin{cases} a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -R\omega^2 \cos \omega t = -R\omega^2 x(t) \\ a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = R\omega^2 \sin \omega t = -R\omega^2 y(t) \end{cases}$$

czyli:  $\vec{a}_d = -R\omega^2 \hat{r}$   
przyspieszenie dośrodkowe skierowane  
jest przeciwnie do wektora  $r$

Zapamiętajmy- jeśli wektor prędkości jest prostopadły do promienia – mamy do czynienia z ruchem obrotowym względem pewnego punktu

# Ruch jednostajnie zmienny po okręgu

- ▶ Punkt porusza się **ruchem zmiennym**, gdy w tych samych przedziałach czasu przebywa różne odcinki (nieformalna def)
- ▶ W ruchu po okręgu oznacza to, że  $\omega = \omega(t) \neq const$
- ▶ Liczymy zatem **przyspieszenie kątowe**, jako pochodną prędkości kątowej po czasie (def):

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



I korzystamy z analogii do wzorów z kinematyki ruchu prostoliniowego:

	r. prostoliniowy	r. po okręgu
droga	$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$
prędkość	$v(t) = v_0 + at$	$\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$
przyspieszenie	$\vec{a}$	$\vec{\varepsilon}$

# Przyspieszenia w ruchu po okręgu

- ▶ W ruchu po okręgu określiliśmy dotychczas przyspieszenia:
  - dośrodkowe (zmiana kier. prędkości  $\vec{v}$ )
  - kątowe (zmiana wartości prędkości kątowej  $\omega$ )
- ▶ Brakuje jeszcze przyspieszenia związanego ze zmianą wartości prędkości liniowej  $\vec{v}$ :

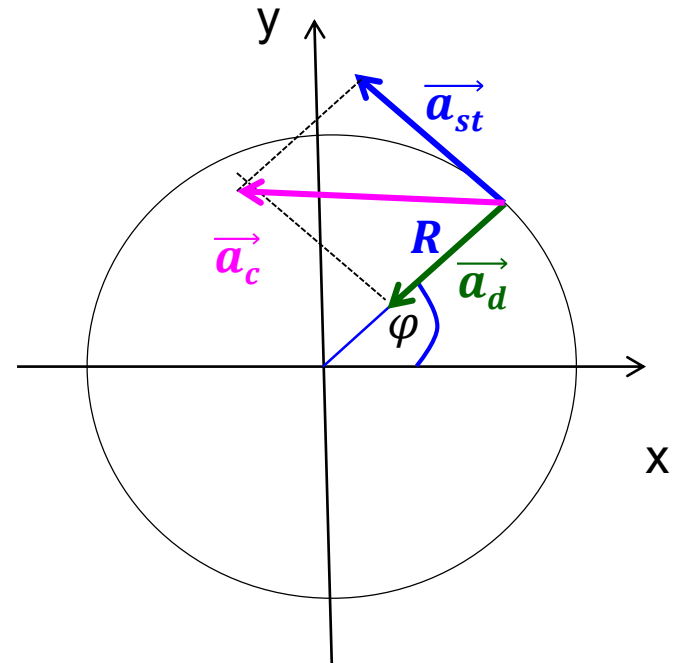
przyspieszenie styczne:



$$\vec{a}_{st} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- ▶ Mamy zatem przyspieszenie całkowite:  $\vec{a}_c = \vec{a}_d + \vec{a}_{st}$
- ▶ związek przyspieszenia stycznego z kątowym:

$$\varepsilon = \frac{a_{st}}{R}$$

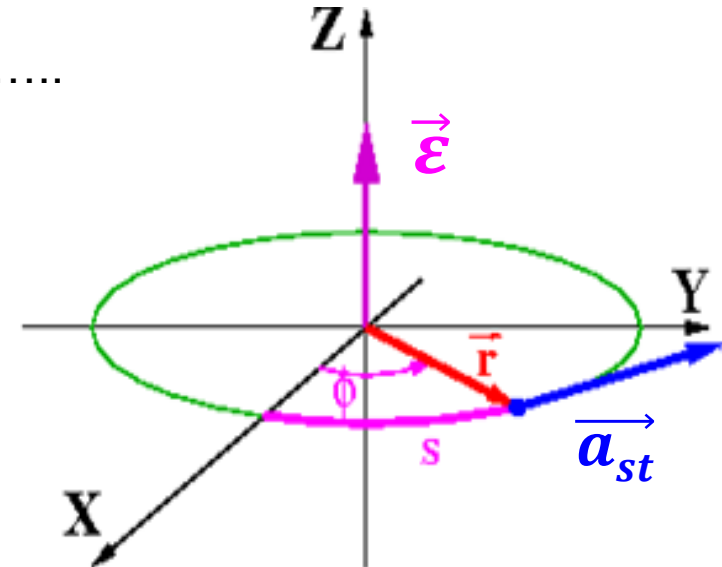


# Przyspieszenie kątowe

- ▶ Przyspieszenie kątowe również jest wektorem.....

$$\vec{a}_{st} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$$

- ▶ Można teraz zadać pytanie (filozoficzne):
  - skoro źródłem przyspieszenia liniowego  $\mathbf{a}$  jest siła, to co jest przyczyną przyspieszenia kątowego?



## Siła kątowa?

No... prawie. Ciało porusza się z przyspieszeniem kątowym, gdy działa

## MOMENT SIŁY

Moment siły jest jednym z najważniejszych pojęć dla każdego młodego inżyniera

# Moment siły

- ▶ Moment siły (moment obrotowy) informuje, jaką siłę i jakim miejscu należy przyłożyć, aby spowodować obrót ciała

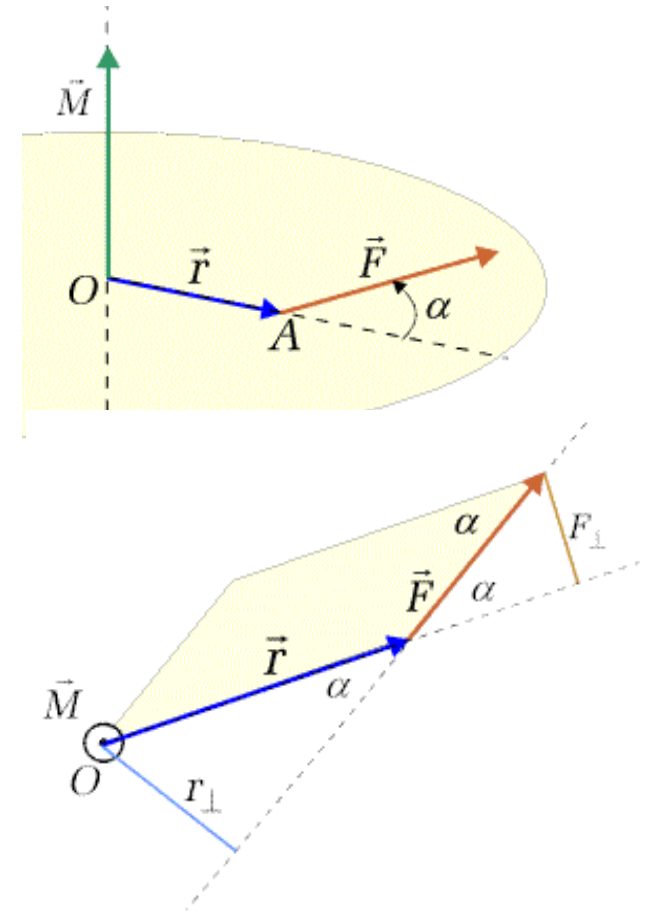


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment siły  $\vec{F}$  przyłożonej w punkcie **A**, określony względem punktu **O**, jest **iloczynem wektorowym** promienia wodzącego  $\vec{r}$  mającego początek w punkcie **O** i siły  $\vec{F}$

**Wartość** momentu siły  $\vec{F}$  obliczymy z zależności:

$$M = r (F \sin \alpha) = r_{\perp} F$$





# Prawa dynamiki w języku zmiennych kątowych

- ▶ Formułowaliśmy już zasady dynamiki dla:
  - punktu materialnego,
  - ciała, ale tylko dla środka masy tego ciała
- ▶ Proszę teraz samodzielnie przedstawić I II zas. dynamiki Newtona dla obracającego się ciała:

Jeżeli na ciało nie działa moment siły lub momenty sił się równoważą, ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem ze stałą prędkością kątową.

Jeżeli na ciało działa niezerowy wypadkowy moment siły, to porusza się ono z przyspieszeniem kątowym  $\vec{\epsilon}$  proporcjonalnym do tego momentu siły, a odwrotnie proporcjonalnym do ..... (za chwilę dokończymy)

$$\vec{M} \propto \vec{\epsilon}$$

## II zasada dynamiki

► Dla ruchu postępowego było:  $\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

siła powoduje zmianę pędu

► A jak zmienić **MOMENT PĘDU**  $\vec{L}$ ?



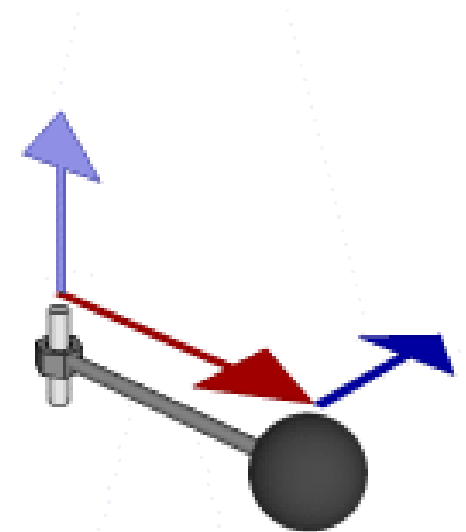
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= 0, \text{ bo } \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \parallel \vec{p}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \end{aligned}$$



[http://pl.wikipedia.org/wiki/Moment\\_p%C4%99du](http://pl.wikipedia.org/wiki/Moment_p%C4%99du)

# Zasada zachowania momentu pędu

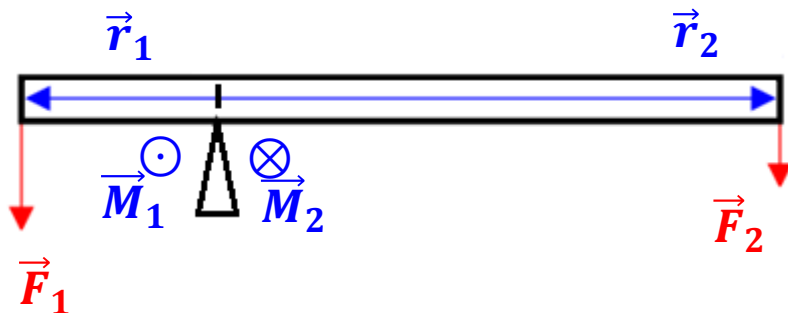
Wypadkowy moment siły powoduje zmianę **MOMENTU PĘDU**  $\vec{L}$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

- ▶ Moment pędu układu jest zachowany, jeżeli wektorowa suma momentów sił działających na ten układ wynosi zero.

$$\sum \vec{M}_i = 0 \Leftrightarrow \vec{L} = \text{const}$$

- ▶ Przykład: podparta belka (dźwignia dwustronna, huśtawka)



$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

momenty sił mają przeciwne zwroty (sprawdzić!):

$$r_1 \cdot F_1 - r_2 \cdot F_2 = 0$$

jest to warunek równowagi

# Siły, pędy i momenty

		II zas. dynamiki	Zasada zachowania
pęd	$\vec{p} = m \vec{v}$	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\sum \vec{F}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\vec{P} = \text{const}$
siła	$\vec{F} = m \vec{a}$		
moment pędu	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{M}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow$ $\vec{L} = \text{const}$
moment siły	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$		

# Moment bezwładności

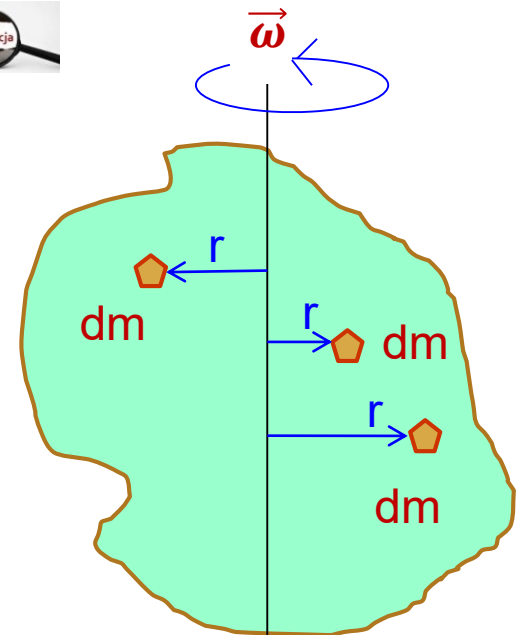
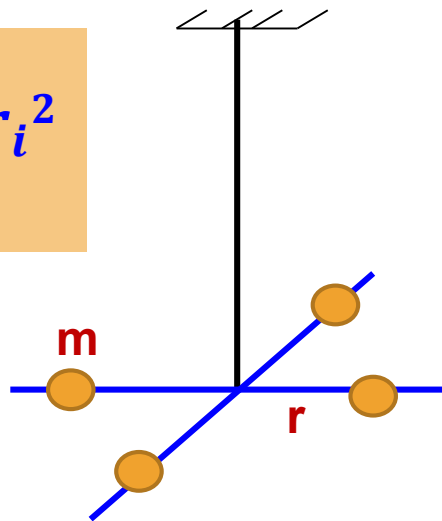
- ▶ Opisywaliśmy do tej pory ruch punktu materialnego. Do opisu układu wielu punktów lub ciał potrzeba parametru opisującego, jak masa rozłożona jest względem pewnego punktu (np. środka masy lub wybranego punktu obrotu).
- ▶ Ograniczymy się do **brył sztywnych**, tzn. ciał, w których odległość pomiędzy dwoma dowolnymi punktami nie zmienia się podczas ruchu.

## MOMENT BEZWŁADNOŚCI:



$$I = \sum m_i r_i^2$$

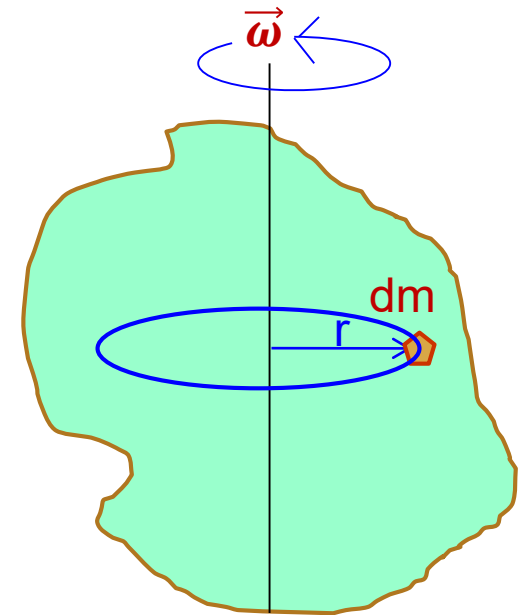
$$I = \int r^2 dm$$



# Dynamika bryły sztywnej

- ▶ Obrót bryły sztywnej wokół nieruchomej osi obrotu jest równoznaczny z ruchem po okręgu każdego punktu  $dm$  z prędkością obrotową  $\vec{\omega}$  i prędkością liniową  $\vec{v}$
- ▶ Energia kinetyczna obracającej się bryły:

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\sum m_i r_i^2}_{= I}$$
$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$



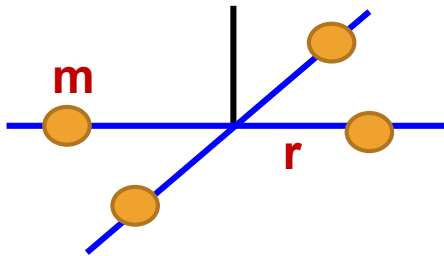
- ▶ Energia kinetyczna obracającego się ciała zależy od rozkładu masy względem osi obrotu i wyboru osi obrotu
- ▶ Analogicznie moment pędu:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

# Moment bezwładności

Przykłady obliczeń:

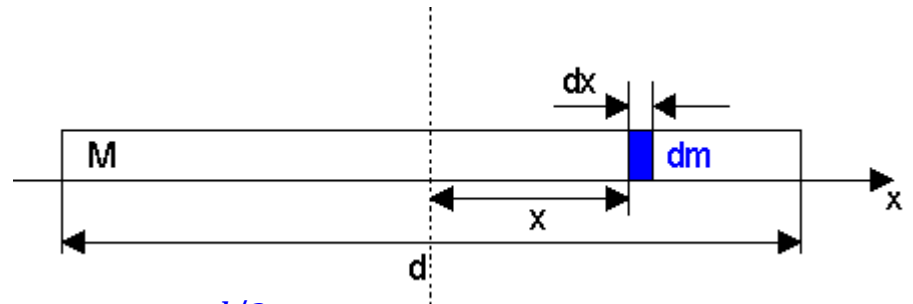
moment bezwładności można obliczyć tylko dla prostych geometrycznie układów:



$$I = \sum m_i r_i^2 = 4 m d^2$$

kula	$I = \frac{2}{5} MR^2$
walec	$I = \frac{1}{2} MR^2$

pręt względem osi przechodzącej przez środek



$$I = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dm \quad \frac{dm}{dx} = \frac{M}{d}$$

$$I = \frac{M}{d} \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{M}{3d} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-d/2}^{d/2} = \frac{Md^2}{12}$$

# Moment bezwładności - spostrzeżenia

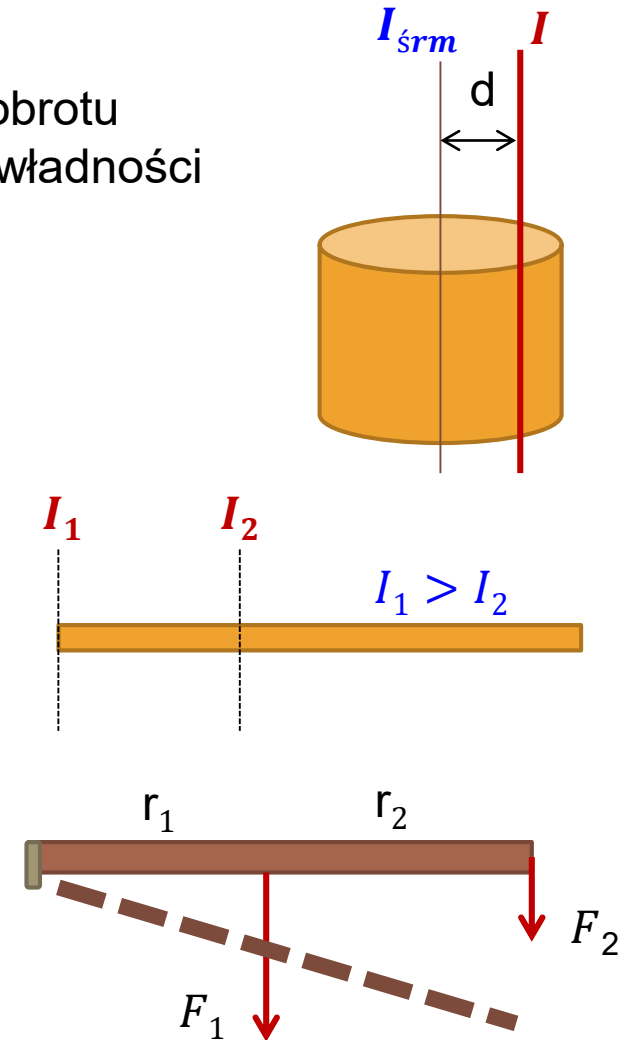
## Twierdzenie Steinera:

Jeśli znamy moment bezwładności względem osi obrotu przechodzącej przez środek masy, to moment bezwładności względem dowolnej osi równoległej do niej wynosi:

$$I = I_{\text{śrm}} + Md^2$$

- ▶ Moment bezwładności jest miarą oporu jaki stwarza ciało przy próbie wprowadzenia go w ruch obrotowy.
- ▶ Zależy od wyboru osi obrotu i rozkładu masy względem osi obrotu.
  - do uzyskania tej samej prędkości kątowej, w przypadku  $I_2$  potrzeba mniejszej siły,
  - ale drzwi lepiej otwierać przykładając siłę najdalej od zawiasów, bo wtedy jest największy moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$





# Dynamika bryły sztywnej

- ▶ Do bryły sztywnej przykładamy siłę  $\vec{F}$ .

Bryła może obracać się wokół nieruchomej osi prostopadłej do ciała, w punkcie „O”.

- ▶ Na ciało działa moment siły:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

- ▶ Ciało obraca się zgodnie z II zas. dyn. Newtona:

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

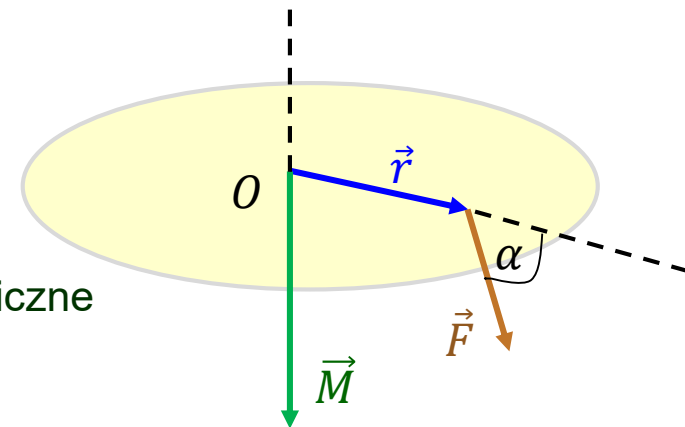
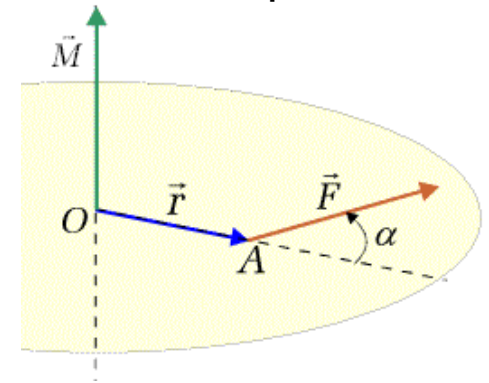
- ▶ Ciało obracając się o kąt  $\varphi$  wykonuje pracę:

$$W = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \vec{M} d\varphi$$

- ▶ Moc w ruchu obrotowym:

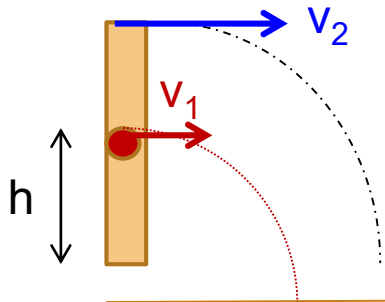
$$P = M \omega$$

zad: dopisać analogiczne wzory dla ruchu prostoliniowego...



# Zasady zachowania w ruchu bryły sztywnej - przykłady

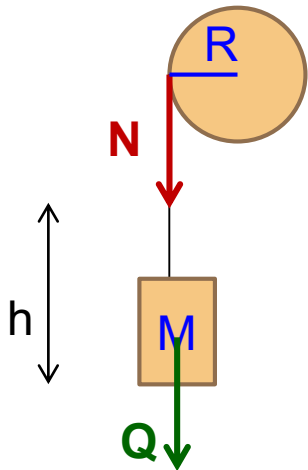
Zasada zachowania energii:



$$\Delta E_K + \Delta E_p = 0$$

$$Mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Tw. o pracy i energii:



Zmiana en. kinetycznej krążka jest równa pracy wykonanej przez ciężarek

$$\Delta E_k = W$$

$$\frac{1}{2} I \Delta \omega^2 = Qh$$

Zasada zachowania momentu pędu:



$$L_1 = I_1 \omega_1 \quad L_2 = I_2 \omega_2$$

$$L_1 = L_2, \quad I_1 > I_2$$

$$\Rightarrow \omega_1 < \omega_2$$

helikopter – wirnik spycha powietrze w dół i wytwarza siłę unoszącą

Równania ruchu:

$$NR = I \varepsilon$$

$$Ma = Q - N$$

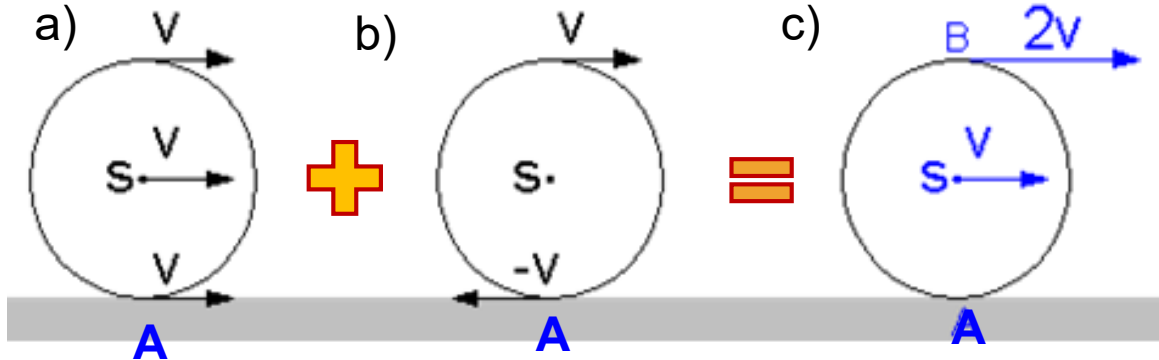
$$a = \varepsilon R$$

zad: sformułować ww zasady (założenie-teza)

# Toczenie (na dwa sposoby)

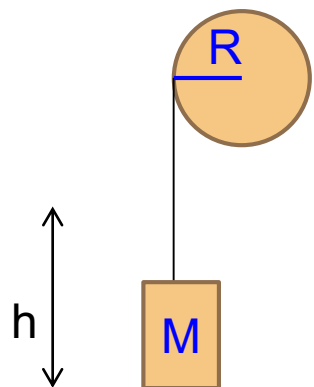


I. Złożenie ruchu **postępowego** środka masy (a) i **ruchu obrotowego** względem środka masy (b)

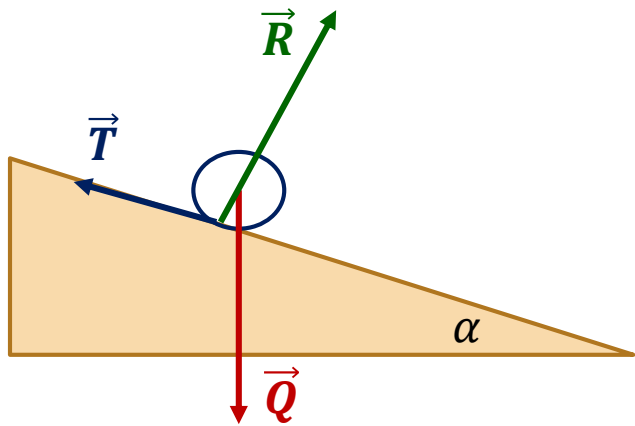


$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

gdy koło się nie ślizga:  $\omega = \frac{v}{R}$

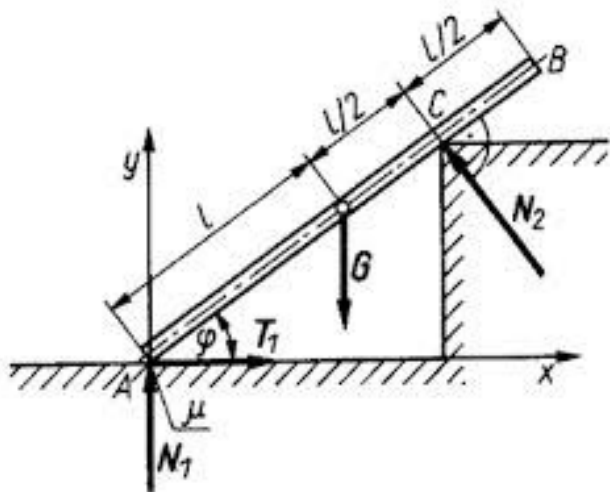


3. Przez nieruchomy krążek o promieniu  $R$  przerzucono nieważką nić, na której końcach zamocowano masy  $m_1$  i  $m_2$ . Moment bezwładności krążka względem osi obrotu wynosi  $I$ . Zakładamy, że nić nie ślizga się. Znaleźć przyspieszenie kątowe krążka i siły naciągu prostoliniowych odcinków nici w czasie ruchu.



# Statyka

- ▶ Jakie warunki muszą być spełnione, aby bryła sztywna pozostawała w spoczynku pomimo wielu sił przyłożonych do niej?
- ▶ Ciało sztywne pozostaje w równowadze, gdy:
  - suma wektorowa wszystkich sił zewnętrznych wynosi zero,
  - suma wektorowa wszystkich zewnętrznych momentów sił (liczonych względem dowolnej osi) wynosi zero.



$$\sum \vec{F}_i = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{N}_2 + \vec{G} = \mathbf{0}$$

$$\sum \vec{M}_{iA} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{M}_{N_1} + \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{N_2} + \vec{M}_G = \mathbf{0}$$

Uwaga na znalezienie odpowiednich kątów pomiędzy wektorami!